Devoir Maison 12

Pour le lundi 9 Février 2026

> La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Exercice 1

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ ne contenant pas 0 et y une fonction réelle de la variable réelle x, définie sur I. On donne l'équation différentielle

$$\mathcal{E}: \quad x\,y'' + 2\,y' - x\,y = 4\,x\,e^{x}$$

1. On pose $\forall\, x \in I, \quad z(x) = x \cdot y(x)$.

   Montrer que y est solution de $\mathcal{E}$ si et seulement si z est solution d'une équation différentielle $\mathcal{F}$ que l'on précisera.

2. Résoudre $\mathcal{F}$ sur I.

   En déduire les solutions de $\mathcal{E}$ sur I.

3. **Question annexe :** ((a) et (b) sont indépendantes)

   on pose $\varphi(x) = \frac{A\,e^{x} + B\,e^{-x}}{x}$ où A et B sont deux constantes réelles.

   (a) Utiliser un développement limité pour répondre aux questions suivantes ;

   (-1-) A quelle condition la fonction φ est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

   (-2-) La fonction ainsi prolongée est-elle dérivable en 0 ?

   (b) Exprimer $\varphi(x)$ en utilisant les fonctions hyperboliques.

   Retrouver alors la condition **(-1-)** ci-dessus.

4. **Raccordement des solutions :**

   (a) Déterminer toutes les solutions de $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{R}$.

   (b) Déterminer l'unique solution y de $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $y(0) = 0$.