

Devoir Maison 11

Pour le 22 janvier 2024

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Exercice 1

On considère deux entiers naturels, non nuls, x et y premiers entre eux.

On pose $S = x + y$ et $P = xy$.

1. (a) Démontrer que x et S sont premiers entre eux, de même que y et S .
 (b) En déduire que $S = x + y$ et $P = xy$ sont premiers entre eux.
 (c) Démontrer que les nombres S et P sont de parités différentes (l'un pair, l'autre impair).
2. Déterminer les diviseurs positifs de 84 et les ranger par ordre croissant.
3. Trouver les nombres premiers entre eux x et y tels que : $SP = 84$.
4. Déterminer les deux entiers naturels a et b vérifiant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} a + b &= 84 \\ ab &= d^3 \end{cases} \text{ avec } d = \text{pgcd}(a ; b)$$

(On pourra poser $a = dx$ et $b = dy$ avec x et y premiers entre eux)

Exercice 2

Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v})

On note \mathbb{C}' l'ensemble des complexes de partie imaginaire **strictement positive** et P' le demi-plan associé à \mathbb{C}' . On appelle A le point de P' d'affixe i .

Pour tout réel t , on pose : $\forall z \in \mathbb{C}', \quad f_t(z) = \frac{z \cos(t) - \sin(t)}{z \sin(t) + \cos(t)}$.

1. Pourquoi f_t est-elle définie sur \mathbb{C}' ?
2. Déterminer les points invariants de f_t selon la valeur de t .
3. Comparer les applications f_t et $f_{t+\pi}$.
4. Exprimer $\frac{f_t(z) - i}{f_t(z) + i}$ en fonction de $\frac{z - i}{z + i}$ quand $z \in \mathbb{C}'$.
5. Quel est l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - i| < |z + i|$?
 En déduire que f_t définit une application de \mathbb{C}' dans \mathbb{C}' .
6. Déterminer la composée $f_t \circ f_u$ où t et u sont deux réels.
7. On note $F = \{f_t \mid t \in \mathbb{R}\}$. Montrer que (F, \circ) est un groupe abélien.