Devoir Maison 11 - Eléments de Correction

Exercice 1

On considère deux entiers naturels, non nuls, x et y premiers entre eux.

On pose $S = x + y$ et $P = xy$.

1. (a) • Par l'absurde : si x et $x+y$ ont un diviseur commun celui-ci-ci divise x et leur différence $x+y-x$ c'est-à-dire x et y. Ce n'est pas vrai, donc x et S sont premiers entre eux.

   • Même démonstration pour x et S.

   (b) D'après la question précédente : puisque x et S sont premiers entre eux, il existe deux entiers u et v tels que $ux + vS = 1$.

   De même puisque y et S sont premiers entre eux, il existe deux entiers u' et v' tels que $u'y + v'S = 1$.

   En faisant le produit membre à membre on a :

   $(ux + vS)(u'y + v'S) = 1 \Leftrightarrow uu'xy + uv'xS + u'vyS + vv'S^2 = 1 \Leftrightarrow uu'P + (uv'x + uv'x + vv'S)\,S = 1$, ce qui montre par réciproque du théorème de Bezout que P et S sont premiers entre eux.

   (c) Si x et y sont pairs ils ne sont pas premiers entre eux : impossible.

   Si x et y sont impairs, leur somme S est paire et leur produit P est impair.

   Si x et y sont de parités différentes, S est impaire et P est paire.

   Donc S et P sont de parités différentes.

2. $84 = 7 \times 12 = 7 \times 4 \times 3 = 2^2 \times 3 \times 7$.

   Les diviseurs positifs de 84 sont donc : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 7 ; 12 ; 14 ; 21 ; 28 ; 42 ; 84.

3. Il suffit de trouver dans la liste deux diviseurs de 84 premiers entre eux.

   On en peut prendre $x = 2$ puisqu'alors y serait pair (42) ; pour la même raison on ne peut pas prendre $S = 6$ ou $S = 14$ ou $S = 42$.

   $S = 3$, n'est pas possible car les nombres seraient trop petits ; idem pour $S = 4$, $S = 6$;

   $S = 42$ ne peut être obtenu qu'avec 28 et 14 dont le produit est trop grand.

   $S = 21$ ne peut provenir que de 7 et 14 dont le produit est 98 ; impossible.

   Reste $S = 7$ qui peut provenir de $x = 3$ et $y = 4$ ou $x = 4$ et $y = 3$, le produit étant égal à $P = 12$. Ce sont les deux solutions.

4. En posant $a = dx$ et $b = dy$ avec x et y premiers entre eux, donc $d = \mathrm{pgcd}(a;b)$, on a donc :

   $a + b = 84 \Leftrightarrow dx + dy = 84 \Leftrightarrow d(x+y) = 84 \Leftrightarrow dS = 84$ et d'autre part :

   $ab = d^2 \Leftrightarrow dx \times dy = d^3 \Leftrightarrow xy = d \Leftrightarrow P = d$, soit en reportant dans la première équation :

   $PS = 84$: on est donc ramené à la question précédente, donc $xy = 3 \times 4 = 12 = d$, d'où les deux nombres sont $a = 12 \times 3 = 36$ et $b = 12 \times 4 = 48$.

   On a bien $36 + 48 = 84$ et $36 \times 48 = 12 \times 3 \times 12 \times 4 = 12 \times 12 \times 12 = 12^3$.

Exercice 2

1. Si $\sin(t) = 0$ alors $\cos(t) = \pm 1$ et $f_t(z)$ est définie pour tout $z \in \mathbb{C}$. Sinon $f_t(z)$ est définie sauf pour $z = \dfrac{-\cos(t)}{\sin(t)}$ qui est réel. $\boxed{\text{Donc } f_t \text{ est définie sur } \mathbb{C}'}$.

2. $f_t(z) = z \Leftrightarrow z\cos(t) - \sin(t) = z\left(z\sin(t) + \cos(t)\right)$, soit $\sin(t)\left(z^2 + 1\right) = 0$.

   Donc tout point est invariant quand $t \equiv 0 \mod \pi$; alors $\boxed{f_t \text{ est l'identité}}$.

   Sinon $\boxed{\text{seuls les points d'affixes } i \text{ et } -i \text{ sont invariants par } f_t}$.

3. Comme $\cos\left(t + \pi\right) = -\cos t$ et $\sin\left(t + \pi\right) = -\sin t$, on a $f_{t+\pi}(z) = f_t(z)$ pour tout z de $\mathbb{C}'$.

   Donc les applications f_t et $f_{t+\pi}$ sont égales.

4. En simplifiant, on trouve $\dfrac{f_t(z) - i}{f_t(z) + i} = \dfrac{e^{-it}\left(z - i\right)}{e^{it}\left(z + i\right)}$ soit $\boxed{\dfrac{f_t(z) - i}{f_t(z) + i} = e^{-2it}\dfrac{z - i}{z + i}}$

   On notera que le dénominateur ne s'annule pas si $z \in \mathbb{C}'$.

5. $|z - i| < |z + i| \Leftrightarrow \left(z - i\right)\left(\overline{z} + i\right) < \left(z + i\right)\left(\overline{z} - i\right)$.

   Après simplification $|z - i| < |z + i| \Leftrightarrow 2\Im(z) > 0$.

   L'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - i| < |z + i|$ est le demi-plan P'.

   On a vu que précédemment que $z \in \mathbb{C}' \Leftrightarrow \left|\dfrac{z - i}{z + i}\right| = \dfrac{|z - i|}{|z + i|} < 1$.

   Or $\left|\dfrac{f_t(z) - i}{f_t(z) + i}\right| = \left|\dfrac{z - i}{z + i}\right|$ puisque $\left|e^{-2it}\right| = 1$. Donc $z \in \mathbb{C}' \Leftrightarrow f_t(z) \in \mathbb{C}'$.

   Ceci montre que f_t définit une application de $\mathbb{C}'$ dans $\mathbb{C}'$.

6. On trouve comme composée $\boxed{f_t \circ f_u = f_{t+u}}$ avec les formules usuelles $\cos(t + u)$ et $\sin(t + u)$.

7. La relation $f_t \circ f_u = f_{t+u}$ montre que la composition est une loi interne dans F.

   La composition des applications est connue pour être associative en général.

   Ici $f_t \circ f_u = f_{t+u}$ et $f_u \circ f_t = f_{u+t}$ sont égales ; d'où la commutativité.

   L'élément neutre est $f_0 = Id$ et la réciproque de $f_t \in F$ est f_{-t}, encore élément de F.

   Donc $(F, \circ)$ est un groupe abélien.