Devoir Maison 11 - Eléments de Correction

Exercice 1
n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. On a $-2 \times n + 1 \times (2n+1) = 1$, donc d'après le théorème de Bezout n et $2n+1$ sont premiers entre eux.
2. (a) $2\alpha - \beta = 2(n+3) - (2n+1) = 2n+6-2n-1 = 5$.
   Comme δ divise α et β, il divise $2\alpha - \beta$ c'est-dire 5.
   Donc $\delta \in \{1\ ;\ 5\}$.
   (b) α multiple de 5 s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha = 5k = n+2$.
   β multiple de 5 s'il existe $k' \in \mathbb{N}$ tel que $\beta = 5k' = 2n+1$. Le nombre $2\alpha - \beta$ est lui aussi un multiple de 5 :
   $2\alpha - \beta = 2(n+3) - (2n+1) = 2n+6-2n-1 = 5$.
3. $1+3-3=0$, donc n^3+2n^2-3n est divisible par$n-1$.
   $n^3+2n^2-3n = n\left(n^2+2n-3\right) = n\left[(n+1)^2-1-3\right] = n\left[(n+1)^2-4\right] = a = n(n+3)(n-1)$.
   De même $2-1-1=0$, donc $2n^2-n-1$ est divisible par $n-1$; $\Delta = 1+8 = 9 = 3^2$; $2n^2-n-1 = 2(n-1)\left(n+\frac{1}{2}\right) = b = (n-1)(2n+1)$.
4. (a) δ divise $n+3$ et $2n+1$, donc δ divise $n(n+3)$ et $2n+1$, donc δ divise d plus grand commun diviseur de $n(n+3)$ et $2n+1$.
   Mais on a vu que n et $2n+1$ sont premiers entre eux, donc :
   $d = \text{PGCD}[n(n+3)\ ;\ 2n+1] = \text{PGCD}(n+3\ ;\ 2n+1) = \delta$.
   (b) D'après la question précédente :
   - si $n \equiv 2 \mod 5$, alors $\Delta = 5(n-1)$;
   - si nn'est pas congru à 2 modulo 5, alors $\Delta = n-1$.

   (c) Application :
   - Avec $n = 2001$: $2001 \equiv 1 \mod 5$, donc $\Delta = 2001 - 1 = 2000$.
   - Avec $n = 2002$: $2001 \equiv 2 \mod 5$, donc $\Delta = 5 \times 2001 = 10005$.

Exercice 2
Première partie

On considère l'équation différentielle (E) suivante définie sur l'intervalle $I =]0; \frac{1}{2}[$: $xy' + y = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$

1. Equation homogène : (EH) : $y' + \frac{1}{x}y = 0$
   Soit la fonction a définie sur I par $a(x) = \frac{1}{x}$. Elle est continue sur I donc admet des primitives sur I. Soit A une primitive de a sur I.
   $\forall x \in I, A(x) \ln|x| = \ln x$ car $x > 0$ alors $e^{-A(x)} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$
   Conclusion : $\boxed{\mathcal{S}_{EH} = \{f_k : x \mapsto \frac{k}{x}, \quad k \in \mathbb{R}\}}$
2. On pose $y_0(x) = \frac{k(x)}{x}$ où k est une fonction dérivable sur I. Alors $\forall x \in I, y_0'(x) = \frac{k'(x)x - k(x)}{x^2}$ et on reporte dans (E) : $x\frac{k'(x)x-k(x)}{x^2} + \frac{k(x)}{x} = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} \Leftrightarrow k'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$ d'où $k(x) = \text{Arcsin}(2x)$
   Une solution particulière de (E) est donc la fonction y_0 définie par : $\boxed{\forall x \in I, y_0(x) = \frac{\text{Arcsin}(2x)}{x}}$
3. Les solutions de (E) sur I sont obtenues en faisant la somme de la solution de l'équation homogène et d'une solution particulière.
   Conclusion : $\boxed{\mathcal{S}_E = \{f_k : x \mapsto \frac{k}{x} + \frac{\text{Arcsin}(2x)}{x}, \quad k \in \mathbb{R}\}}$
4. $g(\frac{1}{4}) = \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow 4k + 4\,\text{Arcsin}(\frac{1}{2}) = \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow 4k + 4\frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow k = 0$
   g est donc la fonction définie par : $\boxed{\forall x \in I, \quad g(x) = \frac{\text{Arcsin}(2x)}{x}}$

Deuxième partie

On considère la fonction f de la variable réelle x définie par : $f(x) = \frac{\text{Arcsin}(2x)}{x}$

5. La fonction Arcsin est définie sur $[-1;1]$ or $2x \in [-1;1] \Leftrightarrow x \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ ainsi la fonction $x \mapsto \text{Arcsin}(2x)$ est définie sur $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$.
   Par ailleurs la fonction inverse est définie sur $\mathbb{R}^*$ alors : $\underline{f \text{ est définie sur } D = [-\frac{1}{2}; 0[\cup]0; \frac{1}{2}]}$.
6. $\forall x \in D, -x \in D$ et $f(-x) = \frac{\text{Arcsin}(-2x)}{-x} = \frac{-\text{Arcsin}(2x}{-x}$ car la fonction Arcsin est impaire.
   Ainsi $\forall x \in D, f(-x) = f(x)$ donc $\underline{f \text{ est paire}}$.
7. On utilise la limite du taux d'accroissement avec la fonction $x \mapsto \text{Arcsin}(2x)$ pour obtenir : $\boxed{\lim_{x \to 0} f(x) = 2}$
8. f est continue sur D en tant que quotient de fonctions continues sur D avec un dénominateur ne s'annulant pas sur D.
   La fonction Arcsin est dérivable sur $]-1;1[$ alors la fonction $x \mapsto \text{Arcsin}(2x)$ est dérivable sur $]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[$ et par suite f est dérivable sur $]-\frac{1}{2}; 0[\cup]0; \frac{1}{2}[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $]-\frac{1}{2}; 0[\cup]0; \frac{1}{2}[$ avec un dénominateur ne s'annulant pas sur $]-\frac{1}{2}; 0[\cup]0; \frac{1}{2}[$.

9. $\forall x \in, \quad]-\frac{1}{2};0[\cup]0;\frac{1}{2}[f'(x) = \frac{\frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}} - \text{Arcsin}(2x)}{x^2} = \frac{h(x)}{x^2}$
or $\forall x \in, \quad]-\frac{1}{2};0[\cup]0;\frac{1}{2}[, x^2 > 0$ donc f' est du signe de la fonction h définie par $\boxed{h(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{1-4x^2}} - \text{Arcsin}(2x)}$

10. h est dérivable sur $]-\frac{1}{2};0[\cup]0;\frac{1}{2}[$ en tant que quotient de fonctions continues sur $]-\frac{1}{2};0[\cup]0;\frac{1}{2}[$ avec un dénominateur ne s'annulant pas sur $]-\frac{1}{2};0[\cup]0;\frac{1}{2}[$, donc h est dérivable sur $]0;\frac{1}{2}[$.
$\forall x \in]0;\frac{1}{2}[, \quad h'(x) = \frac{2\sqrt{1-4x^2} - \frac{-8x.2x}{2\sqrt{1-4x^2}}}{1-4x^2} - \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} = \frac{8x^2}{(1-4x^2)\sqrt{1-4x^2}}$
Ainsi $\forall x \in]0;\frac{1}{2}[, h'(x) > 0$ donc $\underline{h \text{ est strictement croissante sur }]0;\frac{1}{2}[}$
Par ailleurs $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0$ alors on en déduit que $\underline{\forall x \in]0;\frac{1}{2}[, h(x) > 0}$

11. D'après l'étude précédente, $\forall x \in]0;\frac{1}{2}[, f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]0;\frac{1}{2}[$. De plus f est paire donc f est strictement décroissante sur $]-\frac{1}{2};0[$. D'où le tableau de variations :

x	$-\frac{1}{2}$			0			$\frac{1}{2}$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$		$\Vert$		$+$	$\Vert$
$f(x)$	π	$\searrow$	2	$\Vert$	2	$\nearrow$	π

12. f est continue et strictement croissante sur $]0;\frac{1}{2}[$ donc f réalise une bijection de $]0;\frac{1}{2}[$ sur un $\boxed{J =]2;\pi[}$. Elle admet donc une fonction réciproque notée f^{-1} définie sur J.

13. $\frac{1}{4} \in]0;\frac{1}{2}[$ donc l'équation $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}$ admet une unique solution $x = f(\frac{1}{4}) = 4\,\text{Arcsin}\,\frac{1}{2} = \frac{2\pi}{3}$
Conclusion : $\boxed{\mathcal{S} = \{\frac{2\pi}{3}\}}$