Devoir Maison 11

Pour le lundi 2 Février 2026

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Exercice 1

n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Montrer que n et $2n+1$ sont premiers entre eux.
2. On pose $\alpha = n+3$ et $\beta = 2n+1$ et on note δ le PGCD de α et β.
   (a) Calculer $2\alpha - \beta$ et en déduire les valeurs possibles de δ.
   (b) Démontrer que α et β sont multiples de 5 si et seulement si $(n-2)$ est multiple de 5.
3. On considère les nombres a et b définis par :

$$\begin{array}{rcl} a & = & n^3 + 2n^2 - 3n \\ b & = & 2n^2 - n - 1 \end{array}$$

   Montrer, après factorisation, que a et b sont des entiers naturels divisibles par $(n-1)$.
4. (a) On note d le PGCD de $n(n+3)$ et de $(2n+1)$. Montrer que δ divise d, puis que $\delta = d$.
   (b) En déduire le PGCD, Δ, de a et b en fonction de n.
   (c) Application :
   Déterminer Δ pour $n = 2001$;
   Déterminer Δ pour $n = 2002$.

Exercice 2

Première partie

On considère l'équation différentielle (E) suivante définie sur l'intervalle $I =]0; \frac{1}{2}[$

$$xy' + y = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$$

1. Résoudre l'équation homogène associée.
2. Déterminer une solution particulière de (E) à l'aide de la méthode de la variation de la constante.
3. En déduire les solutions de (E) sur I.
4. Déterminer la solution g vérifiant $g(\frac{1}{4}) = \frac{2\pi}{3}$

Deuxième partie

On considère la fonction f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \frac{\text{Arcsin}(2x)}{x}$$

5. Justifier que f est définie sur $D = [-\frac{1}{2}; 0[\cup]0 : \frac{1}{2}]$.

6. Etudier la parité de f.
7. Déterminer la limite de f quand x tend vers 0. On pourra utiliser la limite du taux d'accroissement pour une fonction bien choisie.
8. Indiquer pour quelles valeurs de x ,f est continue, puis dérivable et calculer pour ces valeurs la dérivée f' de f.
9. Justifier que f' est du signe de la fonction h définie par $h(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{1-4x^2}} - \mathrm{Arcsin}(2x)$
10. Etudier les variations de h sur l'intervalle $]0; \frac{1}{2}[$. En déduire le signe de h.
11. Dresser le tableau de f.
12. Démontrer que f réalise une bijection de $]0; \frac{1}{2}[$ sur un intervalle J qu'on précisera. En déduire qu'elle admet une fonction réciproque notée f^{-1}.
13. Résoudre l'équation $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}$