Devoir Maison 10

Pour le lundi 8 Janvier 2024

> La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

On ne fera pas les questions 3), 10), 21), 24) 25) et 26) : le chapitre sur les équivalents et les développements limités n'a pas encore été traité.

Pour les autres, on essaiera de faire proprement celles qui vous sont compréhensibles, avec le corrigé si besoin. L'intégralité du sujet n'est donc pas à traiter pour tous.

Exercice 1
Mines d'Albi - Alès - Douai - Nantes 2003
Premier problème de l'épreuve commune M.P.S.I.

Partie I

Notons

$$f : t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{e^t}{1+t^2}$$

Il est clair que f est définie sur $\mathbb{R}$ entier, et que cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Nous noterons $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.

1. Quelle est la limite de $f(t)$ lorsque t tend vers $-\infty$?
2. Qu'en déduisez-vous au sujet de $\mathcal{C}_f$?
3. Complétez chacune des phrases suivantes au moyen de l'une des locutions "*est équivalente à*", "*est négligeable devant*", "*est dominée par*" :
   $f(t) \dots\dots\dots e^t$ lorsque t tend vers $+\infty$
   $f(t) \dots\dots\dots \frac{e^t}{t}$ lorsque t tend vers $+\infty$
   $f(t) \dots\dots\dots \frac{e^t}{t^2}$ lorsque t tend vers $+\infty$
   Lorsque plusieurs réponses sont acceptables, vous donnerez la plus précise. Bien entendu, vous justifierez votre choix.
4. Quelle est la limite de $f(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$?
5. Expliciter $f'(t)$.
6. Dresser le tableau des variations de f.
7. Expliciter $f''(t)$.
8. Montrer que l'équation $f''(t) = 0$ possède deux solutions réelles : l'une est évidente, l'autre sera noté α. Vous ne chercherez pas à calculer α.
9. Prouver l'encadrement $-\frac{1}{5} < \alpha < 0$.
10. Expliciter le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0. Que pouvez-vous en déduire concernant $\mathcal{C}_f$?
11. Tracez la courbe représentative de f. Vous préciserez son allure au voisinage du point d'abscisse 1.

Partie II

Au vu des expressions de $f(t)$, $f'(t)$ et $f''(t)$, nous nous proposons d'établir que l'assertion $\mathcal{A}(n)$ suivante est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\text{Il existe un polynôme } P_n \text{ tel que } f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)\,e^t}{(1+t^2)^{n+1}} \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}}$$

Vous allez raisonner par récurrence sur n.

Remarque : vous pouvez confondre polynôme et fonction polynomiale.

12. Il est clair que $\mathcal{A}(n)$ est vraie pour $n \in \{0, 1, 2\}$; vous dresserez simplement un tableau donnant l'expression de P_n pour ces valeurs de n.
13. fixons $n \in \mathbb{N}$, et supposons l'assertion $\mathcal{A}(n)$ acquise. Établissez l'assertion $\mathcal{A}(n+1)$; vous déterminerez l'expression de P_{n+1} en fonction de P_n et ${P'}_n$.

Il résulte donc des questions **12** et **13** que l'assertions $\mathcal{A}(n)$ acquise.

14. Montrer que P_n a tous ses coefficients dans $\mathbb{Z}$.
15. Précisez le degré et le coefficient dominant de P_n .
16. Donnez une expression simple de $c_n = P_n(i)$, où i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

Partie III

Notons

$$F : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$$

Ainsi, F est la primitive de f qui s'annule en 0.

17. Quel est le sens de variation de F ?
18. Montrez que $F(x)$ possède une limite l finie lorsque x tend vers $-\infty$. Vous ne chercherez pas à expliciter cette limite.
19. Prouver l'encadrement $-1 \leqslant l \leqslant 0$.
20. Donnez une équation de la tangente à la courbe représentative de F, au point d'abscisse 0.
21. Explicitez le développement limité de F à l'ordre 4 au voisinage de 0.

Nous nous proposons d'étudier le comportement de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. Nous noterons

$$J(x) = \int_1^x \frac{t\,e^t}{(1+t^2)^2}\,dt \quad K(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t^3}\,dt \quad L(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t^4}\,dt$$

22. Prouvez l'existence d'une constante A telle que $F(x) = f(x) + A + 2J(x)$ pour tout réel x.
23. Pour $x \geqslant 1$, placez les uns par rapport aux autres les réels 0, $J(x)$ et $K(x)$.
24. Avec une intégration par parties soigneusement justifiée, montrez que $K(x) - 3\,L(x)$ est négligeable devant $\frac{e^x}{x^2}$ lorsque x tend vers $+\infty$.
25. En découpant l'intervalle $[1, x]$ sous la forme $[1, x^{3/4}] \cup [x^{3/4}, x]$, montrez que $L(x)$ est négligeable devant $\frac{e^x}{x^2}$ lorsque x tend vers $+\infty$.
26. En déduire un équivalent simple de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
27. Exploitez les résultats des questions **17, 19, 20** et **26** pour donner l'allure de la courbe représentative de F.