Devoir Maison 10 - Eléments de Correction

Exercice 1
Partie I

$f(t) = \frac{e^t}{1+t^2}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

1. Quand t tend vers $-\infty$, ce n'est pas une forme indéterminée $\boxed{\lim_{t\to-\infty} f(t) = 0}$

2. Conséquence immédiate : $\boxed{\text{l'axe } x'O\,x \text{ est asymptote à } \mathcal{C}_f \text{ quand } x \to -\infty}$

3. Quand $t \to +\infty$, $1 + t^2$ est équivalent à t^2 donc $f(t) \sim \frac{e^t}{t^2}$.
   Ainsi : $\frac{f(t)}{e^t} \sim \frac{1}{t^2}$ tend vers 0 d'où $f(t) = o(e^t)$
   et de même $\frac{f(t)}{e^t/t} \sim \frac{1}{t}$ tend vers 0 d'où $f(t) = o(\frac{e^t}{t})$
   $$\boxed{\text{quand } t \to +\infty, \quad f(t) \text{ est } \begin{cases} \text{négligeable devant } e^t \\ \text{négligeable devant } \frac{e^t}{t} \\ \text{équivalente à } \frac{e^t}{t^2} \end{cases}}$$

4. Quand $x \to +\infty$, $f(t)$ a la même limite que son équivalent $\frac{e^t}{t^2}$
   dont la limite est connue $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(t) = +\infty}$

5. Le calcul de la dérivée ne présente pas de difficultés :
   $f'(t) = \frac{e^t(1+t^2)-2te^t}{(1+t^2)^2}$ d'où $\boxed{f'(t) = \frac{e^t\,(t-1)^2}{(1+t^2)^2}}$

6. Ainsi : $f'(t) \geqslant 0$, nul pour $t = 1$ d'où le tableau

t	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{e}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

7. La dérivée seconde est la dérivée d'un quotient :
   $$\begin{aligned} f''(t) &= \frac{\left(e^t(t-1)^2 + 2e^t(t-1)\right)(1+t^2) - e^t(t-1)^2 4t}{(1+t^2)^3} \\ &= \frac{e^t\,(t-1)}{(1+t^2)^3}\left((t+1)(t^2+1) - 4t(t-1)\right) \end{aligned}$$
   Conclusion $\boxed{f''(t) = \frac{e^t\,(t-1)}{(1+t^2)^3}\left(t^3 - 3t^2 + 5t + 1\right)}$

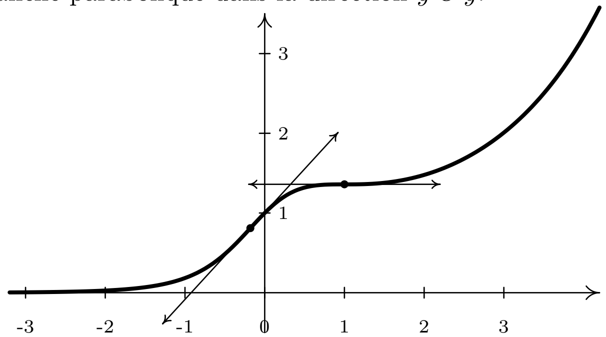
8. $f''(t)$ s'annule si et seulement si $(t-1)\left(t^3 - 3t^2 + 5t + 1\right) = 0$,
   — donc pour $t = 1$
   — et pour $\psi(t) = t^3 - 3t^2 + 5t + 1 = 0$. Comme $\psi'(t) = 3t^2 - 6t + 5 > 0$,
   ψ continue strictement croissante définit une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\left]\lim_{-\infty}\psi, \lim_{+\infty}\psi\right[= \mathbb{R}$
   $$\boxed{f''(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \text{ où } t = \alpha}$$
   Note : en 0 et α, f'' s'annule et change de signe. Ce sont des points d'inflexions.

9. Comme de plus $\psi(-\frac{1}{5}) = -\frac{16}{5^3} < 0$ et $\psi(0) = 1 > 0$, nous avons $\boxed{-\frac{1}{5} < \alpha < 0}$

10. Le développement limité au voisinage de 0, nous avons :
    $$f(t) = \frac{e^t}{1+t^2} = \left(1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + o(t^3)\right)\left(1 - t^2 + o(t^3)\right)$$
    Au voisinage de 0 : $\boxed{f(t) = 1 + t - \frac{t^2}{2} - \frac{5t^3}{6} + o(t^3)}$

    On en déduit l'équation de la tangente en $x = 0$: $y = 1 + x$
    La courbe est localement <u>en dessous</u> de sa tangente
    Ceci est très peu visible sur la figure...

11. On remarquera l'asymptote d'équation y=0, les inflexions en $x = 0$ et $x = 1$, la branche parabolique dans la direction $y'O\,y$.



Partie II

12. Les premières dérivées sont déjà calculées. Elles sont bien sous la forme
    $f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)\,e^t}{(1+t^2)^{n+1}}$ avec

n	0	1	2
P_n	1	$(t-1)^2$	$(t-1)(t^3 - 3t^2 + 5t + 1)$

13. La récurrence est amorcée. Vérifions l'hérédité. Si $f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)\,e^t}{(1+t^2)^{n+1}}$,
alors $f^{(n+1)}(t) = \frac{\big(P_n{}'(t)+P_n(t)\big)e^t(1+t^2)^{(n+1)} - P_n(t)e^t(n+1)(1+t^2)^n 2t}{(1+t^2)^{2n+2}}$
$= \frac{\big(P_n{}'(t)+P_n(t)\big)e^t(1+t^2) - P_n(t)e^t(n+1)2t}{(1+t^2)^{n+2}} = \frac{P_{n+1}(t)\,e^t}{(1+t^2)^{n+2}}$
qui confirme l'hérédité avec $\boxed{P_{n+1}(t) = \big(t^2-2(n+1)t+1\big)\,P_n(t) + (1+t^2)P_n{}'(t)}$

14. Montrons que les coefficients de P_n sont entiers :
— c'est vrai pour $n \in \{0,1,2\}$ (voir l'amorce)
— la formule précédente montre l'hérédité puisque, si P_n a des coefficients entiers, il en est de même pour $P_n{}'$ et les deux facteurs. $\boxed{P_n \text{ a des coefficients entiers}}$

15. Les trois premiers polynômes permettent de supposer que P_n est normalisé de degré $2n$.
Est-ce héréditaire ? Si P_n est normalisé de degré $2n$, alors
$$P_{n+1}(t) = \underbrace{\big(t^2-2(n+1)t+1\big)\,P_n(t)}_{\deg = 2n+2} + \underbrace{(1+t^2)P_n{}'(t)}_{\deg = 2n+1}$$
P_{n+1} est bien normalisé, de degré $2(n+1)$. $\boxed{P_n \text{ est normalisé de degré } 2n}$

16. La formule de la question **13** utilisée avec $x = i$ donne $P_{n+1}(i) = -2\,(n+1)\,i\,P_n(i)$.
Nous avons : $P_0(i) = 1$, $P_1(i) = (-2i)\times 1$, $P_2(i) = (-2i)\times 2\times(-2i)\times 1 = (-2i)^2\,2!$.
Une récurrence simple montre $\boxed{P_n(i) = (-2i)^n\,n!}$

Partie III

17. f étant continue (de classe $\mathcal{C}^\infty$), F est bien une primitive de f (de classe $\mathcal{C}^\infty$).
F a pour dérivée f positive, donc $\boxed{F \text{ est croissante sur } \mathbb{R}}$

18. F étant croissante, elle admet une limite finie en $-\infty$ si et seulement si elle est minorée.
$$\forall\, t\in\mathbb{R},\quad \frac{1}{1+t^2} \le 1 \text{ et } e^t > 0 \Rightarrow \frac{e^t}{1+t^2} \le e^t$$
donc, pour $x<0$: $\displaystyle\int_0^x \frac{e^t}{1+t^2}\,dt \geqslant \int_0^x e^t\,dt = e^x - 1 > -1$
F est croissante minorée donc
$\boxed{F \text{ admet une limite finie quand } x \text{ tend vers } -\infty}$

19. $\forall\, x<0$: $-1 \leqslant F(x) \leqslant F(0) = 0$. En passant à la limite $\boxed{-1 \leqslant l \leqslant 0}$

20. La tangente en $x=0$ a pour équation $y = x\,F'(0) + F(0)$.
Comme $F(0) = 0$ et $F'(0) = f(0) = 1$, il vient $\boxed{\text{tangente en } x=0 : \quad y = x}$

21. On peut intégrer le développement limité de la question **10**. Avec $F(0)=0$:
$f(t) = 1 + t - \frac{t^2}{2} - \frac{5t^3}{6} + o(t^3)$ il vient $\boxed{F(x) = x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{5\,x^4}{24} + o(x^4)}$

On pose $J(x) = \int_1^x \frac{t\,e^t}{(1+t^2)^2}\,dt$, $K(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t^3}\,dt$, $L(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t^4}\,dt$

22. Comme $f'(t) = \frac{(t-1)^2\,e^t}{(1+t^2)^2} = \frac{(1+t^2)\,e^t}{(1+t^2)^2} - 2\frac{t\,e^t}{(1+t^2)^2}$.
En intégrant : $\displaystyle\underbrace{\int_0^x f'(t)\,dt}_{=f(x)-f(0)} = \underbrace{\int_0^x \frac{e^t}{1+t^2}\,dt}_{=F(x)} -2\int_0^x \frac{t\,e^t}{(1+t^2)^2}\,dt$
En utilisant la relation de Chasles, il vient :
$$F(x) = f(x) + \underbrace{2\int_0^1 \frac{t\,e^t}{(1+t^2)^2}\,dt - f(0)}_{=A \quad \text{constante}} + \underbrace{2\int_1^x \frac{t\,e^t}{(1+t^2)^2}\,dt}_{=J(x)} \quad \boxed{F(x) = f(x) + A + 2\,J(x)}$$

23. Pour $t \geqslant 1$: $1+t^2 > t^2 \Rightarrow (1+t^2)^2 > t^4 \Rightarrow \frac{1}{(1+t^2)^2} < \frac{1}{t^4} \Rightarrow \frac{t}{(1+t^2)^2} < \frac{1}{t^3}$.
En multipliant par $e^t > 0$: $0 \leqslant \frac{t\,e^t}{(1+t^2)^2} < \frac{e^t}{t^3}$.
En intégrant sur $[1,x]$ (avec $1<x$) : $\boxed{0 \leqslant J(x) \leqslant K(x)}$

24. Utilisons une intégration par parties pour transformer $K(x)$: $u(t) = t^{-3}$, $v(t) = e^t$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,x]$ (avec $1<x$), $u'(t) = -3t^{-4}$, $v'(t) = e^t$ donne
$$K(x) = \int_1^x e^t\,t^{-3}\,dt = \big[e^t\,t^{-3}\big]_1^x - \int_1^x -3\,e^t\,t^{-4}\,dt = \frac{e^x}{x^3} - e + 3\,L(x)$$
Quand $x\to+\infty$: $\frac{e^x}{x^3}$ tend vers l'infini, donc $\frac{e^x}{x^3} - e \sim \frac{e^x}{x^3} = \frac{e^x}{x^2}\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}$,
ce qui montre que $\boxed{K(x) - 3\,L(x) = o(\frac{e^x}{x^2})}$

25. Écrivons $L(x) = \int_1^{x^{3/4}} \frac{e^t}{t^4}\,dt + \int_{x^{3/4}}^x \frac{e^t}{t^4}\,dt = L_1 + L_2$.

— $t \geqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant \frac{e^t}{t^4} \leqslant e^t \Rightarrow 0 \leqslant L_1 \leqslant \int_1^{x^{3/4}} e^t\,dt = e^{x^{3/4}} - e < e^{x^{3/4}}$ (avec $1 < x^{3/4}$)

d'où $0 \leqslant \frac{L_1}{e^x/x^2} \leqslant \frac{x^2}{e^{x-x^{3/4}}} = \frac{x^2}{e^x}\,\frac{1}{e^{1-x^{-1/4}}}$.

Par pincements, quand $x \to +\infty$, le quotient tend vers 0, d'où $L_1 = o(\frac{e^x}{x^2})$

— pour $x^{3/4} \leqslant t \leqslant x$: $x^3 \leqslant t^4 \leqslant x^4 \Rightarrow \frac{e^t}{x^4} \leqslant \frac{e^t}{t^4} \leqslant \frac{e^t}{x^3}$. En intégrant

(avec $x^{3/4} < x$) : $\frac{e^x - e^{x^{3/4}}}{x^4} = \frac{1}{x^4}\int_{x^{3/4}}^x dx \leqslant L_2 \leqslant \frac{1}{x^3}\int_{x^{3/4}}^x dx = \frac{e^x - e^{x^{3/4}}}{x^3}$

montre que $\frac{e^x}{x^2}\,\frac{1-e^{x^{3/4}-x}}{x^2} \leqslant L_2 \leqslant \frac{e^x}{x^2}\,\frac{1-e^{x^{3/4}-x}}{x}$ d'où, par pincement,

quand $x \to +\infty$: $\lim_{x\to+\infty} \frac{L_2}{e^x/x^2} = 0$ soit $L_2 = 0(\frac{e^x}{x^2})$

$L(x)$ est la somme de deux quantités négligeables devant $\frac{e^x}{x^2}$ donc $\boxed{L(x) = o(\frac{e^x}{x}^2)}$

26. Commençons par montrer que $J(x) = o(\frac{e^x}{x^2})$. En effet :

— la question **24** indique que $K(x) = 3L(x) + o(\frac{e^x}{x^2})$.

Comme $L(x) = o(\frac{e^x}{x^2})$ (question **25**), $K(x)$ est négligeable devant $\frac{e^x}{x^2}$

— Mais la question **23** indique que $0 < J(x) < K(x)$.

$J(x)$ est donc également négligeable devant $\frac{e^x}{x^2}$

Quand $x \to +\infty$, $f(x) \sim \frac{e^x}{x^2}$

A constante est négligeable devant $f(x)$ (qui tend vers l'infini)

$2J(x)$ est négligeable devant $\frac{e^x}{x^2}$ donc devant $f(x)$

Ainsi $F(x) = f(x) + \underbrace{A + 2J(x)}_{= o(e^x/x^2)} \sim f(x) \sim \frac{e^x}{x^2}$. Par transitivité $\boxed{F(x) \sim \frac{e^x}{x^2}}$

27. Nous avons tous les éléments pour représenter F :

F croissante

asymptote $y = l$ en $-\infty$ $(-1 \leqslant l \leqslant 0)$

tangente et position relative en $x = 0$

Branche parabolique dans la direction $y'O\,y$ en $+\infty$ car $\frac{F(x)}{x} \sim \frac{e^x}{x^3} \to +\infty$