Devoir Maison 10 - Eléments de Correction

Exercice 1

1. (a) La fonction sin est a valeurs dans $[-1,1]$, donc $x \mapsto \text{Arcsin}(\sin x)$ est définie sur $\mathbb{R}$.
Ainsi, la fonction $\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$.
La fonction sin étant $2\pi-$périodique, nous avons

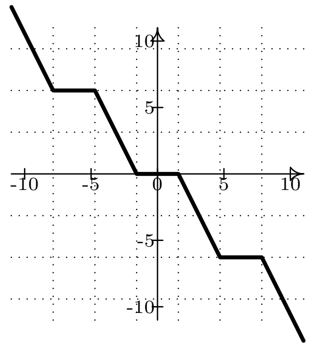
$$\begin{aligned}\forall\ x \in \mathbb{R}, f(x+2\pi) &= \text{Arcsin}\left(\sin(x+2\pi)\right) - \left(x+2\pi\right)\\ &= \text{Arcsin}\left(\sin x\right) - x - 2\pi = f(x) - 2\pi.\end{aligned}$$

On a bien le résultat annoncé : $\boxed{\forall\ x \in \mathbb{R},\quad f(x+2\pi) = f(x) - 2\pi}$
Ainsi, pour tout point $M\left(x,y\right)$, $M \in \mathcal{C} \Rightarrow M'\left(x+2\pi, y-2\pi\right) \in \mathcal{C}$. On passe de M à M' par translation de vecteur $\left(2\pi\overrightarrow{i} - 2\pi\overrightarrow{j}\right)$.
Il suffit donc $\underline{\text{d'étudier } f \text{ sur tout intervalle de longueur } 2\pi}$
D'autre part, les fonctions "arcsin", "sin" et identité sont impaires. f est impaire. On centre l'intervalle en 0 (il devient $[-\pi,\pi]$) et on étudie f sur $[0,\pi]$,
puis on effectue $\underline{\text{la symétrie par rapport à l'origine}}$
suivie des $\underline{\text{translations}\quad 2k\pi\left(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}\right),\quad k \in \mathbb{Z}}$

(b) Supposons ici que $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant x < \dfrac{3\pi}{2}$
Nous avons $u = \text{Arcsin}(\sin x) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin u = \sin x \\ -\dfrac{\pi}{2} \leqslant u \leqslant \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$. Deux cas se présentent :
— $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$: sur cet intervalle, sin est injective, d'où $u = x$ donc $\underline{f(x) = 0}$
— $\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2}$: mais alors $-\dfrac{\pi}{2} < \pi - x < \dfrac{\pi}{2}$ et $\sin u = \sin x = \sin\left(\pi - x\right)$.
Le même raisonnement montre que $u = \pi - x$ donc $\underline{f(x) = \pi - 2x}$

Nous en déduisons la valeur de $f(x)$: $\boxed{f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ \pi - 2x & \text{si } \dfrac{\pi}{2} \leqslant x < \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}}$

(c) D'où la représentation sur I puis, par translations, la représentation sur l'intervalle demandé



2. (a) L'équation (E) s'écrit $\text{Arcsin}(\sin x) - x + \text{Arcsin}(\sin y) - y = 0$, soit $f(x) + f(y) = 0$. Nous avons donc $\underline{M(x,y) \in \mathcal{S} \Leftrightarrow f(x) + f(y) = 0}$.
La question **1/a)** montre que $f(x+2\pi) = f(x) - 2\pi$. Nous avons également $f(x-2\pi) = f(x) + 2\pi$ [le calcul direct est immédiat. Il est aussi possible d'utiliser $f(y) = f(y - 2\pi + 2\pi) = f(y-2\pi) - 2\pi$].

$$\begin{aligned}\text{Ainsi :}\quad M(x,y) \in \mathcal{S} &\Leftrightarrow f(x) + f(y) = 0\\ &\Leftrightarrow f(x+2\pi) + f(y-2\pi) \Leftrightarrow M'(x+2\pi, y-2\pi) \in \mathcal{S}\end{aligned}$$

Ceci montre que $\boxed{\mathcal{S} \text{ est invariant par translation } T_{2\pi(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j})}}$

(b) $x \in I = [-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}[$. Etudions les deux cas :
— $\underline{\text{si } -\dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}\quad \text{alors } f(x) = 0 \text{ donc}}$ $M(x,y) \in \mathcal{S} \Leftrightarrow f(y) = 0$.
La condition devient $\text{Arcsin}(\sin y) = y \Leftrightarrow y \in [-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$. Dans ces conditions, les points de $\mathcal{S}$ sont $\boxed{\text{tous les points du carré } [-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}] \times [-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]}$
— $\underline{\text{si } \dfrac{\pi}{2} \leqslant x < \dfrac{3\pi}{2}\quad \text{alors } f(x) = \pi - 2x \in]-2\pi, 0].}$
On en déduit que : $M \in \mathcal{S} \Leftrightarrow y = \underbrace{\text{Arcsin}(\sin y)}_{-\frac{\pi}{2} < \ \leqslant \frac{\pi}{2}} + \underbrace{f(x)}_{-2\pi \leqslant\ \leqslant 0}$ d'où $y \in [-\dfrac{5\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$.
Etudions les trois cas :
• $-\dfrac{5\pi}{2} \leqslant y \leqslant -\dfrac{3\pi}{2}$ alors $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant y + 2\pi \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ et $\sin y = \sin\left(y + 2\pi\right)$ donc $\text{Arcsin}\left(\sin(y)\right) = y + 2\pi$. La condition devient $f(x) = -2\pi$ soit $x = \dfrac{3\pi}{2}$ qui n'est pas dans l'intervalle $\boxed{\text{pas de point}}$

• $-\dfrac{3\pi}{2} \leqslant y \leqslant -\dfrac{\pi}{2}$ alors $\dfrac{\pi}{2} \leqslant -y-\pi \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ et $\sin y = \sin\left(-y-\pi\right)$
donc $\operatorname{Arcsin}\left(\sin y\right) = -y-\pi$. La condition devient $f(x) = \pi + 2y$
soit $x+y=0$ $\boxed{\text{segment de droite : } x+y=0}$

• $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ alors $\operatorname{Arcsin}(\sin y) = y$. La condition devient $f(x)=0$
soit $x = \dfrac{\pi}{2}$ et y quelconque $\boxed{\text{C'est le côté du carré déjà obtenu}}$

(c) Il suffit de représenter $\mathcal{S}$ pour $x \in I$, puis d'effectuer des translations.