Devoir Maison 09

Pour le lundi 18 Décembre 2023

> La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Exercice 1

1. Déterminer les solutions dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes de l'équation

$$Z^4 = 1$$

2. Déduire de la question précédente les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation d'inconnue z :

$$\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$$

3. Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
   (a) Placer les points A, B et C d'affixes respectives : $a = -2, \quad b = \frac{-1}{5} - \frac{3i}{5}, \quad c = \frac{-1}{5} + \frac{3i}{5}$
   (b) Démontrer que les points O, A, B et C sont situés sur un cercle, que l'on déterminera.
   (c) Placer le point D d'affixe $d = \frac{-1}{2}$ Exprimer sous forme trigonométrique le nombre complexe z' défini par : $z' = \frac{a-c}{d-c}$
   (d) En déduire le rapport $\frac{CA}{CD}$. Quelle autre conséquence géométrique peut-on tirer de l'expression de z' ?

On considère la fonction f définie par : $\quad f(x) = \text{Arctan}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$.

Exercice 2

On note (Γ) sa courbe représentative.

1. Quel est l'ensemble $\mathcal{D}$ de définition de f ?
2. Étudier les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.
3. Calculer la dérivée f', donner son signe et tracer le tableau des variations de f.
4. Rappeler (sans démonstration) quelle est la valeur de $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
5. Tracer (Γ) (faire figurer tous les résultats obtenus).

Exercice 3

Pour tout entier naturel n non nul, on note f_n la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \; f_n(x) = x - n.\ln(x)$$

1. (a) Etudier cette fonction et dresser son tableau de variations.
   (b) En déduire, lorsque n est supérieur ou égal à 3, l'existence de deux réels $u_n$et v_n solutions de l'équation $f_n(x) = 0$ et vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; n \geq 3 \Rightarrow 0 < u_n < n < v_n$$

2. Etude de la suite $(u_n)_{n\geq 3}$.

(a) Montrer que $\forall n \geq 3,\ 1 < u_n < e$.

(b) Montrer que $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$, puis en conclure que (u_n) est décroissante.

(c) En déduire que $(u_n)_{n\geq 3}$ converge et montrer, en encadrant $\ln(u_n)$, que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

(d) (Optionnel) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(u_n)}{u_n - 1} = 1$; en déduire que $u_n - 1 \sim \frac{1}{n}$.

3. Etude de la suite $(v_n)_{n\geq 3}$

(a) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

(b) Calculer $f_n(n \cdot \ln(n))$ puis montrer que $\forall n \geq 3$, $n.\ln(n) < v_n$.

(c) Soit g la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, g(x) = x - 2\ln(x)$$

Etudier g et donner son signe.
En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, n > 2\ln(n)$.

(d) En déduire le signe de $f_n(2n.\ln(n))$, puis établir que :

$$n\ln(n) < v_n < 2n.\ln(n)$$

(e) (Optionnel) Montrer enfin que : $\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n \cdot \ln(n)$