# Devoir Maison 09 - Eléments de Correction

**Exercice 1**

1. $Z^4 = 1$ : $\boxed{\mathcal{S} = \left\{ e^{\frac{i2k\pi}{4}}, k \in [\![0;3]\!] \right\} = \{1; i; -i; -1\}}$

2. On pose $Z = \frac{2z+1}{z-1}$ avec $z \neq 1$ et on utilise les solutions précédentes :
   $Z = 1 \Leftrightarrow 2z+1 = z-1 \Leftrightarrow z = -2$
   $Z = -11 \Leftrightarrow 2z+1 = -z+1 \Leftrightarrow z = 0$
   $Z = i \Leftrightarrow 2z+1 = iz - i \Leftrightarrow z = \frac{-1-i}{2-i} = -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i$
   $Z = -i \Leftrightarrow 2z+1 = -iz + i \Leftrightarrow z = \frac{-1+i}{2+i} = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$
   $\boxed{\mathcal{S} = \left\{0; -2; -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i; -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i\right\}}$

3. Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
   (a) graphique...
   (b) **Analyse** : Si $O, A, B, C$ sont cocycliques alors le centre du cercle est à l'intersection des médiatrices de $[OA]$ et $[BC]$. Celle de $[OA]$ est d'équation $x = -1$ et celle de $[BC]$ est l'axe des abscisses. Donc le seul centre possible est $I$ d'affixe $-1$.
   **Synthèse** : Il reste à vérifier que les distances de I à chacun des 4 autres points sont égales.
   (c) $z' = \frac{a-c}{d-c} = \cdots = -2\frac{3-i}{1+2i} = 2\sqrt{2}(\frac{-1}{5\sqrt{2}} + \frac{7}{5\sqrt{2}}i)$
   (d) Le rapport $\frac{CA}{CD} = 2\sqrt{2}$. L'autre conséquence géométrique est le cosinus et le sinus de l'angle $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD})$.

**Exercice 2**

1. La fonction Arctan est définie sur $\mathbb{R}$. L'ensemble de définition de $f : x \mapsto \text{Arctan}\,\dfrac{x}{x-1}$ est celui de la fraction, donc $\boxed{\mathcal{D} = \mathbb{R} - \{1\}}$

2. limites aux bornes :
   — En $\pm\infty$, $\dfrac{x}{x-1} \sim \dfrac{x}{x} \to 1$ et $\text{Arctan}(1) = \dfrac{\pi}{4}$ donc $\boxed{\lim_{+\infty} f = \lim_{-\infty} f = \dfrac{\pi}{4}}$
   — En $1+\varepsilon$, $\dfrac{x}{x-1} \to \varepsilon\infty$ donc $\boxed{\lim_{1^+} f = \dfrac{\pi}{2} \text{ et } \lim_{1^-} f = -\dfrac{\pi}{2}}$

3. Dériver la composée ne pose aucun problème :

$$f'(x) = \text{Arctan}\,'\left(\frac{x}{x-1}\right)\left(\frac{x}{x-1}\right)' = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2}\frac{-1}{(x-1)^2}$$

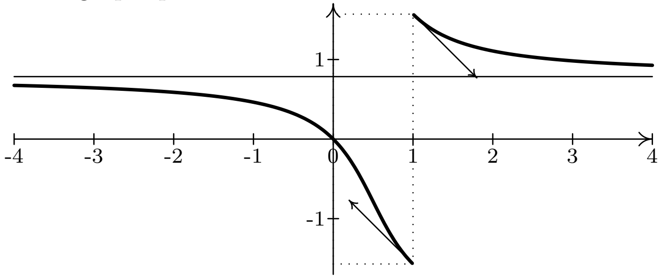
On obtient donc : $\boxed{f'(x) = \dfrac{-1}{2x^2-2x+1}}$

Le dénominateur est positif (puisque le discriminant $2^2 - 4 \cdot 2 < 0$).
La dérivée est négative sur son ensemble de définition, d'où les variations :

| $x$ | $-\infty$ | | | $1$ | | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $-$ | | $\|\|$ | | $-$ | |
| $f$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\searrow$ | $-\frac{\pi}{2}$ | $\|\|$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\searrow$ | $\frac{\pi}{4}$ |

4. Nous savons que, pour $x$ non nul : $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{|x|}{x}\dfrac{\pi}{2}$ (1).

5. D'où la représentation graphique demandée :




**Exercice 3**

Pour tout entier naturel $n$ non nul, on note $f_n$ la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_n(x) = x - n.\ln(x)$.

1. (a) $f_n$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f_n'(x) = 1 - \dfrac{n}{x} = \dfrac{x-n}{x}$
   En $+\infty$ on a $f_n(x) = x(1 - n\ln(x)/x) \to +\infty$ car $\ln(x) \ll x$
   En 0 : $x - n.\ln(x) \to +\infty$ car $n > 0$

| $x$ | $0$ | | $n$ | | $+\infty$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x - n$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | affine |
| $f_n'(x)$ | $\|\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | | |
| $f_n(x)$ | $\|\|$ $+\infty$ | $\searrow$ | $n - n\ln(n)$ | $\nearrow$ | $+\infty$ | |

   (b) Pour $n \geq 3$, on applique alors le théorème de bijection sur $]0, n[$ (on pourrait aussi le faire dès à présent sur $[1, e]$ pour la question suivante )

On détermine pour cela le signe de $n - n\ln(n) = n(1-\ln(n))$ et comme $n \geq 3 > e$ on a $\ln(n) > 1$ donc $n - n\ln(n) < 0$

$f_n$ est continue et strictement décroissante sur $]0,n[$ donc bijective de $]0,n[$ dans $]\lim_n f_n, \lim_0 f_n[ = ]n - n\ln(n), +\infty[$

Et comme $n - n\ln(n) < 0$ alors $0 \in ]n - n\ln(n), +\infty[$

Donc $\boxed{\text{l'équation } f_n(x) = 0 \text{ a une unique solution sur l'intervalle } ]0,n[ : u_n.}$

On a donc $f_n(u_n) = 0 = u_n - n\ln(u_n)$ et $0 < u_n < n$

De même $\boxed{\text{il y a une unique solution } v_n \text{ sur l'intervalle } ]n,+\infty[ \text{ donc } n < v_n}$

(il n'y a pas d'autres solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ car $f_n(n) = n - n\ln(n) \neq 0$

2. Etude de la suite $(u_n)_{n\geq 3}$.

(a) On compare les images pour pouvoir comparer les termes. On les calcule d'abord :

$f_n(1) = 1 - n\ln(1) = 1$

$f_n(u_n) = 0$

$f_n(e) = e - n\ln(e) = e - n < 0$ car $n \geq 3 > e$

On a donc $f_n(1) > f_n(u_n) > f_n(e)$

et comme $f_n$ est strictement décroissante sur $]0,n]$ et que 1, $u_n$ et $e$ en sont éléments (car $e < n$ ) alors

Donc : $\boxed{\forall n \geq 3 : 1 < u_n < e}$

(b) $f_n(u_{n+1}) = u_{n+1} - n\ln(u_{n+1})$

On connaît $f_{n+1}(u_{n+1}) = u_{n+1} - (n+1)\ln(u_{n+1}) = u_{n+1} - n\ln(u_{n+1}) - \ln(u_{n+1}) = 0$

Donc $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$

Pour avoir $u_n \geq u_{n+1}$ on compare les images par $f_n$ :

$f_n(u_n) = 0$

$f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1}) \geq 0$ car $u_{n+1} \geq 1$

Donc $f_n(u_n) \leq f_n(u_{n+1})$ et comme $f_n$ est strictement décroissante sur $]0,n]$ et que $u_n$ et $u_{n+1}$ en sont éléments ( car $u_{n+1} < e < n$ ) alors :

Conclusion : $\boxed{\forall n \geq 3 : u_n \geq u_{n+1} \text{ et la suite est décroissante}}$

(c) La suite $u$ est donc décroissante et minorée par 1 donc $\boxed{(u_n) \text{ est convergente vers } \ell \geq 1.}$

**ATTENTION :** on ne connaît pas la valeur de cette limite, on ne peut pas encore conclure que $\ell = 1$

Pour encadrer $\ln(u_n)$ on peut partir de $1 < u_n < e$ d'où $0 < \ln(u_n) < 1\ldots$ cela n'est pas suffisant pour avoir un encadrement plus précis de la limite.

Il faut chercher $\ln(u_n)$ ailleurs : $f_n(u_n) = 0 = u_n - n\ln(u_n)$ donc $\ln(u_n) = u_n/n$ et donc en divisant l'inégalité précédente par $n > 0$ :

$$\frac{1}{n} < \ln(u_n) = \frac{u_n}{n} < \frac{e}{n}$$

Donc par encadrement $\ln(u_n) \to 0$.

Or exp est continue sur $\mathbb{R}$ donc $u_n = \exp(\ln(u_n)) \to e^0 = 1$ $\boxed{(u_n) \to 1}$

(d) Comme $u_n \to 1$, on se ramène là où l'on dispose d'outils en posant $x = u_n - 1 \to 0$ on a $\ln(u_n) = \ln(1+x) \sim x$ quand $x \to 0$ donc $\ln(u_n) \sim u_n - 1$ et donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(u_n)}{u_n - 1} = 1$

On calcule la limite du quotient de $u_n - 1$ et $\frac{1}{n}$ en faisant apparaître le quotient précédent :

$$\frac{u_n - 1}{1/n} = n(u_n - 1) = \frac{u_n - 1}{\ln(u_n)} n\ln(u_n)$$

et comme $u_n - n\ln(u_n) = 0$ on a $n\ln(u_n) = u_n \to 1$ donc

$$\frac{u_n - 1}{1/n} \to 1$$

*Conclusion :* $\boxed{u_n - 1 \sim \frac{1}{n}}$

3. Etude de la suite $(v_n)_{n\geq 3}$

(a) Comme $n < v_n$, par minoration on a $\boxed{v_n \to +\infty.}$

(b) $f_n(n.\ln(n)) = n\ln(n) - n\ln(n\ln(n))$ et comme $n$ et $\ln(n) > 0$ alors

$f_n(n.\ln(n)) = n\ln(n) - n[\ln(n) + \ln(\ln(n))] = n\ln(\ln(n))$

et comme $n > e$ alors $\ln(n) > 1$ et $\ln(\ln(n)) > 0$ (car ln strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ )

On a donc $f_n(n\ln(n)) < 0 = f_n(v_n)$

Comme $f_n$ est strictement croissante sur $[n,+\infty[$ et que $n\ln(n)$ et $v_n$ en sont éléments (comme $\ln(n) \geq 1$, $n\ln(n) \geq n$ ) alors $\boxed{\forall n \geq 3,\ n.\ln(n) < v_n.}$

(c) Soit $g$ la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^*, g(x) = x - 2\ln(x)$.
$g$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$g'(x) = 1 - \frac{2}{x} = \frac{x-2}{x}$$

| $x$ | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x-2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | ‖ | $\searrow$ | $2-2\ln(2)$ | $\nearrow$ | |

On a $2 - 2\ln(2) = 2(1-\ln(2)) > 0$ car $2 < e$. $g$ est décroissante puis croissante avec un minimum strictement positif alors $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+^* \text{ on a } g(x) > 0.}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^* : g(n) > 0$ et $\boxed{n > 2\ln(n).}$

(d) On a alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\begin{aligned} f_n(2n.\ln(n)) &= 2n.\ln(n) - n\ln(2n.\ln(n)) \\ &= n\left[2\ln(n) - \ln(n) - \ln(2) - \ln(\ln(n))\right] \\ &= n\left[\ln(n) - \ln(2\ln(n))\right] \end{aligned}$$

et comme $n > 2\ln(n)$ et que ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et qu'ils en sont éléments, alors $\ln(n) > \ln(2\ln(n))$ et $\boxed{f_n(2n.\ln(n)) > 0}$

Donc $f_n(n\ln(n)) < f_n(v_n) < f_n(2n.\ln(n))$ et comme $n\ln(n) \geq n$ ainsi que $v_n$ et $2n\ln(n)$ et que $f_n$ est strictement croissante sur $[n, +\infty[$ on a $\boxed{n\ln(n) < v_n < 2n.\ln(n)}$

(e) On a alors $\ln(n\ln(n)) < \ln(v_n) < \ln(2n.\ln(n))$
donc $\ln(n) + \ln(\ln(n)) < \ln(v_n) < \ln(n) + \ln(2) + \ln(\ln(n))$
et en divisant par $\ln(n) > 0$ pour faire apparaître le quotient :

$$1 + \frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)} < \frac{\ln(v_n)}{\ln(n)} < 1 + \frac{\ln(2)}{\ln(n)} + \frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)}$$

on a en $+\infty$ : $\ln(x) \ll x$ donc en substituant $\ln(n) = x \to +\infty$ : $\ln(\ln(n)) \ll \ln(n)$, le majorant et le minorant tendent vers 1.

Donc par encadrement, $\ln(v_n)/\ln(n) \to 1$ et $\boxed{\ln(v_n) \sim \ln(n)}$