Devoir Maison 09 - Eléments de Correction

Exercice 1

1. (a) Montrons par récurrence la propriété $0 < a_n \leqslant b_n$ (ce qui assure que les suites sont définies).
   - Vrai pour $n = 0$ par hypothése
   - $\forall\, n \in \mathbb{N}$, si $0 < a_n < b_n$, alors
     - $a_n\, b_n > 0 \Rightarrow a_{n+1} = \sqrt{a_n\, b_n}$ est défini positif
     - $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + b_n - 2\sqrt{a_n b_n}\right) = \dfrac{\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}\right)^2}{2} > 0 \Rightarrow a_{n+1} > b_{n+1}$

   Conclusion $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 < a_n < b_n}$

   Nous pouvons alors en déduire que, pour tout entier naturel n :
   - $0 < a_n < b_n \Rightarrow {a_n}^2 < a_n\, b_n \Rightarrow a_n = \sqrt{{a_n}^2} < \sqrt{a_n\, b_n} = a_{n+1}$ (an) croissante
   - $b_{n+1} - b_n = \frac{a_n + b_n}{2} - b_n = \frac{a_n - b_n}{2} < 0$ (bn) décroissante
   - (a_n) croissante majorée (par b_0) converge. Notons l sa limite

     (b_n) décroissante minorée (par a_0) converge. Notons l' sa limite

     quand $n \to +\infty$, l'égalité $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ devient $l' = \frac{l + l'}{2}$ d'où $l = l'$

   Conclusion $\boxed{\text{Les suites } (a_n) \text{ et } (b_n) \text{ sont adjacentes.}}$

   Leur limite commune dépend des premiers termes a et b. Elle est notée $M(a, b)$.

   (b) $M(a, b)$ est encadrée par a_n et b_n. Pour en avoir une valeur approchée à 10^{-5} près, il suffit de calculer a_n et b_n jusqu'au moment où $b_n - a_n < 10^{-5}$:

n	a_n	b_n	$b_n - a_n$
1	1	2	1
2	1.41421	1.50000	0.08578
3	1.45647	1.45710	0.00063
4	1.45679	1.45679	0.000003

   $\boxed{M(1, 2) \approx 1.45679 \text{ à } 10^{-5} \text{ près par défaut.}}$

2. $r_n = \frac{b_n}{a_n}$, $\quad w_n = \frac{(b_n - a_n)\, {b_n}^2}{(b_n + a_n)^3}$

   (a) Calcul de r_{n+1} et w_n :
   - $r_{n+1} = \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{a_n + b_n}{2\sqrt{a_n\, b_n}} \times \frac{\sqrt{a_n}}{\sqrt{a_n}} = \frac{a_n + b_n}{2\, a_n}\sqrt{\frac{a_n}{b_n}}$ d'où $\boxed{r_{n+1} = \frac{r_n + 1}{2\sqrt{r_n}}}$
   - $w_n = \frac{(b_n - a_n)\, {b_n}^2}{(b_n + a_n)^3} = \dfrac{\frac{(b_n - a_n)\, {b_n}^2}{{a_n}^3}}{\left(\frac{b_n + a_n}{a_n}\right)^3}$ d'où $\boxed{w_n = \frac{(r_n - 1)\, {r_n}^2}{(r_n + 1)^3}}$

   (b) Puisque $0 < a_n < b_n$, il est évident que $r_n > 1$ donc :
   - $0 < r_n - 1 < r_n + 1 \Rightarrow 0 < \frac{r_n - 1}{r_n + 1} < 1$
   - $0 < r_n < r_n + 1 \Rightarrow 0 < \frac{r_n}{r_n + 1} < 1 \Rightarrow \frac{{r_n}^2}{(r_n + 1)^2} < 1$

   En multipliant membre à membre : $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 < w_n < 1}$

   (c) En remarquant que $r_{n+1} - 1 = \frac{r_n + 1 - 2\sqrt{r_n}}{2\sqrt{r_n}} = \frac{(\sqrt{r_n} - 1)^2}{2\sqrt{r_n}}$ et que de même $r_{n+1} + 1 = \frac{(\sqrt{r_n} + 1)^2}{2\sqrt{r_n}}$, nous pouvons transformer le quotient :

$$\frac{w_{n+1}}{{w_n}^2} = \frac{\frac{(\sqrt{r_n} - 1)^2}{2\sqrt{r_n}} \;\; \frac{(r_n + 1)^2}{4\, r_n}}{\left(\frac{(\sqrt{r_n} + 1)^2}{2\sqrt{r_n}}\right)^3} \times \frac{(r_n + 1)^6}{(r_n - 1)^2\, {r_n}^4} = \frac{w_{n+1}}{{w_n}^2} = \frac{(\sqrt{r_n} - 1)^2\, (r_n + 1)^8}{(\sqrt{r_n} + 1)^6\, (r_n - 1)^2\, {r_n}^4}$$

   Comme $r_n - 1 = (\sqrt{r_n} - 1)(\sqrt{r_n} + 1)$

   il reste $\frac{w_{n+1}}{{w_n}^2} = \frac{(r_n + 1)^8}{(\sqrt{r_n} + 1)^8\, {r_n}^4}$ soit $\boxed{\frac{w_{n+1}}{{w_n}^2} = \left(\frac{r_n + 1}{\sqrt{r_n}\,(\sqrt{r_n} + 1)}\right)^8}$

   Mais : $1 < r_n \Rightarrow 1 < \sqrt{r_n} \Rightarrow \frac{r_n + 1}{\sqrt{r_n}\,(\sqrt{r_n} + 1)} = \frac{r_n + 1}{r_n + \sqrt{r_n}} < 1$ $\boxed{w_{n+1} < {w_n}^2}$

   (d) Nous en déduisons $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad w_n < {w_0}^{(2^n)}}$ car :
   - $w_1 < {w_0}^2$, puis $w_2 < {w_1}^2 < ({w_0}^2)^2 = {w_0}^{(2^2)}$
   - et l'hérédité : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad w_n < {w_0}^{(2^n)} \Rightarrow w_{n+1} < {w_n}^2 < \left({w_0}^{(2^n)}\right)^2 = {w_0}^{(2^{n+1})}$

   Ainsi : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{(b_n - a_n)\, b_n}{(a_n + b_n)^3} < {w_0}^{(2^n)} \Rightarrow b_n - a_n < \frac{(a_n + b_n)^3}{{b_n}^2}\, {w_0}^{(2^n)}$.

   Mais $1 < a_n < b_n \Rightarrow 0 < \frac{a_n + b_n}{b_n} < 2 \Rightarrow \frac{(a_n + b_n)^3}{b_n^2} < 8\, b_n$

   nous pouvons conclure $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^* : \quad 0 < b_n - a_n < 8\, b_n\, {w_0}^{(2^n)}}$

   (e) <u>*Application numérique :*</u> $w_0 = \frac{(2-1)\, {2^2}^3}{1+2} = \frac{4}{27}$ et $a_n < M(1, 2) < b_n$.

   On en déduit : $\left|M(1, 2) - a_n\right| < \left|b_n - a_n\right| < 8 \times 2 \times \left(\frac{4}{27}\right)^{(2^n)}$.

   Pour une erreur inférieure à 10^{-8}, il suffit que (avec un logarithme décimal)

$$16\left(\frac{4}{27}\right)^{(2^n)} < 10^{-8} \Leftrightarrow \log 16 + 2^n \log\frac{4}{27} < -8 \Leftrightarrow 2^n > \frac{8 + \log 16}{\log 27 - \log 4} \approx 11.1$$

   Il suffit que $2^n > 11.1 \Leftrightarrow n > \frac{\ln 10.7}{\ln 2} \approx 3.5$ $\boxed{a_4 \text{ approche } M(1, 2) \text{ à } 10^{-8} \text{ près.}}$

3. $0 < u_0 \leqslant v_0 \leqslant w_0$ et

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n + w_n}{3}, \ v_{n+1} = (u_n\, v_n\, w_n)^{1/3}, \ \frac{1}{w_{n+1}} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n} + \frac{1}{w_n}\right)$$

   (a) Étudions $f : x \mapsto \frac{x + y + z}{3} - (xyz)^{1/3}$ sur $\mathbb{R}_+$

$f'(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(xyz)^{-2/3}\, yz > 0 \Leftrightarrow x > \sqrt{yz}$

Sur $\mathbb{R}_+$, la fonction présente un minimum pour $x = \sqrt{yz}$ qui vaut

$$\frac{\sqrt{yz} + y + z}{3} - \underbrace{\left(\sqrt{yz}\, yz\right)^{1/3}}_{=\sqrt{yz}} = \frac{1}{3}\ \left(y + z - 2\sqrt{yz}\right) = \frac{1}{3}\left(\sqrt{y} - \sqrt{z}\right)^2 \geqslant 0$$

Conclusion $\boxed{\text{Sur } \mathbb{R}_+ : \quad \frac{x+y+z}{3} \geqslant (x\,y\,z)^{1/3}}$

(b) Montrons que $\forall\ n \in \mathbb{N}, \quad 0 < w_n \leqslant v_n \leqslant u_n$ par récurrence

- il est évident que tous les termes sont positifs.
- le résultat précédent appliqué aux positifs u_0, v_0, w_0 montre que $v_{n+1} \leqslant u_{n+1}$
- appliqué aux positifs $\frac{1}{u_n}, \frac{1}{v_n}, \frac{1}{w_n}$ on obtient

$\left(\frac{1}{x\,y\,z}\right)^{1/3} \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n} + \frac{1}{w_n}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{v_{n+1}} \leqslant \frac{1}{w_{n+1}} \Leftrightarrow w_{n+1} \leqslant v_{n+1}$ (positifs)

Conclusion $\boxed{\forall\ n \in \mathbb{N}, \quad 0 < w_n \leqslant v_n \leqslant u_n}$

(c) Le signe de la différence $u_n - u_{n+1}$ montre que $\underline{(u_n) \text{ est décroissante :}}$

$$u_n - u_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2\,u_n - v_n - w_n\right) = \frac{1}{3}\left(\underbrace{(u_n - v_n)}_{>0} + \underbrace{(u_n - w_n)}_{>0}\right) > 0$$

Le signe de la différence $\frac{3}{w_n} - \frac{3}{w_{n+1}}$ montre que $\underline{(w_n) \text{ est croissante :}}$

$$\frac{3}{w_n} - \frac{3}{w_{n+1}} = \frac{2}{w_n} - \frac{1}{u_n} - \frac{1}{v_n} = \underbrace{\left(\frac{1}{w_n} - \frac{1}{u_n}\right)}_{\geqslant 0 \text{ car } 0<w_n\leqslant u_n} - \underbrace{\left(\frac{1}{w_n} - \frac{1}{v_n}\right)}_{\geqslant 0 \text{ car } 0<w_n\leqslant v_n} \geqslant 0$$

ce qui prouve que $\frac{1}{w_n} \geqslant \frac{1}{w_{n+1}} > 0 \Rightarrow w_n \leqslant w_{n+1}$

(d)
- $0 < w_n \leqslant v_n \leqslant u_n \Rightarrow u_{n+1} = \frac{1}{3}\left(u_n + v_n + w_n\right) \leqslant \frac{1}{3}\left(2u_n + w_n\right)$
- $0 < w_n \leqslant v_n \leqslant u_n \Rightarrow \frac{1}{u_n} \leqslant \frac{1}{v_n} \leqslant \frac{1}{w_n} \Rightarrow 0 < \frac{1}{w_{n+1}} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n} + \frac{1}{w_n}\right) \leqslant \frac{1}{w_n}$

$\Rightarrow w_{n+1} \geqslant w_n \Rightarrow -w_{n+1} \leqslant -w_n$

En ajoutant membre à membre (avec $w_{n+1} \leqslant u_{n+1}$) :

$u_{n+1} - w_{n+1} \leqslant \frac{1}{3}(2u_n + w_n) - w_n \quad \Rightarrow \boxed{0 < u_{n+1} - w_{n+1} \leqslant \frac{2}{3}(u_n - w_n)}$

(e) L'inégalité précédente montre que

- $0 \leqslant u_1 - w_1 \leqslant \frac{2}{3}(u_0 - w_0)$
- puis $0 \leqslant u_2 - w_2 \leqslant \frac{2}{3}(u_1 - w_1) \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^2 (u_0 - w_0)$
- Une récurrence évidente montre que $0 \leqslant u_n - w_n \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n (u_0 - v_0)$.

d'où, par pincement : $\underline{\lim_{n\to+\infty} u_n - w_n = 0\ .}$

Les suites (w_n) et (u_n) sont adjacentes : elles ont une limite commune.

Par pincement : la suite (v_n) admet la même limite.

Conclusion $\boxed{(u_n),\ (v_n),\ (w_n) \text{ convergent vers la même limite.}}$

Exercice 2

1. (a) $E = \mathbb{C} - \{1, i\} \qquad f(z) = \frac{z+i}{z-i}$

Constatons que $f(z)$ est défini pour $z \neq i$ donc défini sur E.

D'autre part :

- $f(z) = 1 \Leftrightarrow z + i = z - i$ est impossible
- $f(z) = i \Leftrightarrow z + i = i\,(z - i) \Leftrightarrow z\,(1 - i) = 1 - i \Leftrightarrow z = 1$ or $1 \notin E$

Ceci montre que f est une application de E dans E. $\boxed{f(E) \subset E}$

(b) Cherchons les antécédents d'un élément $z' \in E$:

$$f(z) = z' \Leftrightarrow z + i = z'\,(z - i) \Leftrightarrow z(1 - z') = -i\,(z' + 1) \Leftrightarrow z = i\,\frac{z' + 1}{z' - 1}$$

(ce qui est possible puisque $z' \neq 1$)

Ceci montre l'existence d'un unique antécédent dans $\mathbb{C}$.

Vérifions que cet antécédent appartient à E :

$z = 1 \Leftrightarrow i\,(z' + 1) = z' - 1 \Leftrightarrow z'(i - 1) = -i - 1 \Leftrightarrow z' = \frac{1-i}{1+i} = i \notin E$

$z = i \Leftrightarrow i\,(z' + 1) = i\,(z' - 1)$ est impossible.

Tout élément de E admet donc un unique antécédent dans E

donc $\boxed{f \text{ est bijective et } f^{-1}(z') = i\,\frac{z'+1}{z'-1}}$

(c) Puisque f est définie sur E et $f(E) = E$, on peut composer :

$f \circ f(z) = \frac{\frac{z+i}{z-i} + i}{\frac{z+i}{z-i} - i} = \frac{(1+i)\,(z+1)}{(1-i)\,(z-1)}$ soit $\boxed{\forall\ z \in E,\ f \circ f(z) = i\,\frac{z+1}{z-1}}$

En remarquant que $f \circ f(z) = f^{-1}(z)$, il vient $\boxed{f^{\,3} = \mathrm{Id}_E}$

2. (a) Si $z \in \mathbb{R} - \{1\}$, alors $\left|f(z)\right| = \frac{|z + i|}{|z - i|} = 1$ (car $z+i$ et $z-i$ sont conjugués)

Comme de plus $z \in E \Rightarrow f(z) \in E$, nous avons $f\left(\mathbb{R} - \{1\}\right) \subset \mathcal{U} \cap E$

Réciproquement, $f(z) \in \mathcal{U} \cap E \Leftrightarrow \left|z + i\right| = \left|z - i\right|$ c'est-à-dire si z est équidistant des points d'affixes i et $-i$. C'est donc $\mathbb{R} \cap E = \mathbb{R} - \{1\}$.

On peut confirmer ceci par le calcul :

tout élément $z' \in \mathcal{U} \cap E$ a pour antécédent $z = i\,\frac{z'+1}{z'-1}$.

Montrons que $z \in \mathbb{R} - \{1\}$:

$z \neq 1$ car $z' \in E \Rightarrow z \in E \quad (f^{-1} : E \to E)$

$z' \in \mathcal{U} \Rightarrow z'\overline{z'} = 1$ donc $\overline{z} = -i\,\frac{\overline{z'}+1}{\overline{z'}-1} = -i\,\frac{\frac{1}{z'}+1}{\frac{1}{z'}-1} = i\,\frac{z'+1}{z'-1} = z$

z est donc réel. Finalement $\boxed{f\left(\mathbb{R} - \{1\}\right) = \mathcal{U} \cap E}$

(b) $z' = f(z)$ appartient à $D = \left\{z \in E \;—\; |z| < 1\right\}$ si et seulement si $z \in E$ vérifie $|z+i| < |z-i|$, c'est-à-dire le le point z est plus proche de $-i$ que de i.

Ceci correspond au demi-plan inférieur $\mathrm{Im}(z) < 0$. $\boxed{f(P) = D}$

Note : on peut confirmer ce résultat par un calcul algébrique

$$\left|f(z)\right|^2 < 1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{|z+i|^2}{|z-i|^2} < 1 \Leftrightarrow x^2 + (y+1)^2 < x^2 + (y-1)^2$$

$$\Leftrightarrow\quad 2y < -2y \Leftrightarrow y < 0$$

3. (a) C'est un calcul algébrique simple :

$$\frac{a'-c'}{a'-d'} = \frac{\frac{a+i}{a-i} - \frac{c+i}{c-i}}{\frac{a+i}{a-i} - \frac{d+i}{d-i}} = \frac{d-i}{c-i}\;\frac{(a+i)(c-i)-(c+i)(a-i)}{(a+i)(d-i)-(d+i)(a-i)}$$

qui donne finalement $\boxed{\frac{a'-c'}{a'-d'} = \frac{d-i}{c-i}\;\frac{c-a}{d-a}}$

(b) En adaptant le résultat précédent, il vient

$$\begin{aligned} B(a',b',c',d') &= \frac{a'-c'}{a'-d'}\;\frac{b'-d'}{b'-c'} \\ &= \frac{d-i}{c-i}\;\frac{c-a}{d-a}\;\frac{c-i}{d-i}\;\frac{d-b}{c-b} = \frac{(c-a)\,(d-b)}{(d-a)\,(c-b)} \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{B(a',b',c',d') = B(a,b,c,d)}$

(c) Si a,b,c,d sont cocycliques ou alignés, alors $B(a,b,c,d) \in \mathbb{R}$. Il en est donc de même pour $B(a',b',c',d')$ donc $\boxed{a',b',c',d' \text{ sont cocycliques ou alignés}}$

(d) Transformons $\frac{1-c'}{1-d'} = \frac{1-\frac{c+i}{c-i}}{1-\frac{d+i}{d-i}} = \frac{c-i}{d-i}$. Ainsi, en utilisant **3-a** il vient

$$B(a',1,c',d') = \frac{\frac{a'-c'}{a'-d'}}{\frac{1-c'}{1-d'}} = \frac{\frac{(d-i)\,(a-c)}{(c-i)\,(a-d)}}{\frac{c-i}{d-i}} = \frac{a-c}{a-d}$$

Ainsi, $a',1,c',d'$ sont cocycliques ou alignés <u>ssi</u> $B(a',1,c',d') \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \frac{a-c}{a-d}$ c'est-à-dire <u>ssi</u> $\boxed{a,c,d \text{ sont alignés}}$

4. (a) Les points invariants sont les solutions dans E de $f(z) = z$, qui est équivalent à une équation du second degré $z + i = z\,(z-i) \Leftrightarrow z^2 - (1+i)\,z - i = 0$.

Le discriminant est $\Delta = (1+i)^2 + 4\,i = 6\,i = 3\,(1+i)^2$. Les points fixes sont donc $\frac{(1+i)\pm\sqrt{3}\,(1+i)}{2}$ soit $\boxed{\alpha = \frac{1+\sqrt{3}}{2}\,(1+i) \text{ et } \beta = \frac{1-\sqrt{3}}{2}\,(1+i)}$

(b) En remarquant que $(1+i)^2 = 2\,i$, nous pouvons écrire

$$\frac{\beta - i}{\alpha - i} = \frac{\frac{1+i}{2}\left(1-\sqrt{3}-(1+i)\right)}{\frac{1+i}{2}\left(1+\sqrt{3}-(1+i)\right)} = \frac{-\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}-i} = -\frac{2+2\,i\,\sqrt{3}}{4} = j^2$$

Conclusion $\boxed{\frac{\beta-i}{\alpha-i} = j^2}$

(c) Avec les notations de ce problème : $\alpha = \alpha'$ et $\beta = \beta'$. Avec le résultat **3-a** on obtient $\frac{z'-\alpha}{z'-\beta} = \frac{z'-\alpha'}{z'-\beta'} = \frac{\beta-i}{\alpha-i}\;\frac{z-\alpha}{z-\beta}$ donc $\boxed{\frac{z'-\alpha}{z'-\beta} = j^2\;\frac{z-\alpha}{z-\beta}}$

5. (a) Δ est la médiatrice de α et β. Nous avons

$$z \in \Delta \cap E \Leftrightarrow |z-\alpha| = |z-\beta| \Leftrightarrow \left|j^2\,\frac{z-\alpha}{z-\beta}\right| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z'-\alpha}{z'-\beta}\right| = 1$$

d'où l'équivalence $z \in \Delta \cap E \Leftrightarrow z' \in \Delta \cap E$ qui s'écrit $\boxed{f(\Delta \cap E) = \Delta \cap E}$

(b) La question **4-b** montre que $\left|\frac{\beta-i}{\alpha-i}\right|$=1 donc $i \in \Delta$.

Enfin, le calcul du **3-d** indique que $\frac{1-\alpha'}{1-\beta'} = \frac{\alpha-i}{\beta-i}$ d'où $\left|\frac{1-\alpha'}{1-\beta'}\right| = 1$. Comme $\alpha = \alpha'$ et $\beta = \beta'$, nous avons $|1-\alpha| = |1-\beta|$ soit $1 \in \Delta$. $\boxed{\{1,i\} \subset \Delta}$

(c) Si $z \in \Delta$ médiatrice de α et β, alors Δ est bissectrice de l'angle $\widehat{\alpha z \beta}$ d'où (puisque $i \in \Delta$) : $\arg\frac{z-\alpha}{z-i} \equiv \arg\frac{z-i}{z-\beta}\ [2\pi]$

donc $\boxed{\arg(z-\alpha) + \arg(z-\beta) \equiv 2\,\arg(z-i)\ [2\,\pi]}$

(d) La question **4-c** indique que

$$\arg(z'-\alpha) - \arg(z'-\beta) \equiv \frac{4\,\pi}{3} + \arg(z-\alpha) - \arg(z-\beta)\ [2\,\pi] \qquad (1)$$

$z \in \Delta \cap E \Rightarrow z' \in \Delta \cap E$ (voir **5-a**). La question précédente permet d'écrire

$$\begin{cases} \arg(z-\alpha) + \arg(z-\beta) \equiv 2\,\arg(z-i)\ [2\,\pi] \\ \arg(z'-\alpha) + \arg(z'-\beta) \equiv 2\,\arg(z'-i)\ [2\,\pi] \end{cases}$$

z, z' et i sont alignés donc

$$\arg(z-i) \equiv \arg(z'-i)\ [\pi] \Rightarrow 2\arg(z-i) \equiv 2\arg(z'-i)\ [2\pi]$$

On en déduit que $\arg(z-\alpha)+\arg(z-\beta) \equiv \arg(z'-\alpha)+\arg(z'-\beta)\ [2\pi]$ (3)

Par addition et soustraction de (2) et (3) on obtient enfin

$$\boxed{\begin{cases} \arg(z'-\alpha) \equiv \frac{2\pi}{3}+\arg(z-\alpha)\ [\pi] \\ \arg(z'-\beta) \equiv -\frac{2\pi}{3}+\arg(z-\beta)\ [\pi] \end{cases}}$$

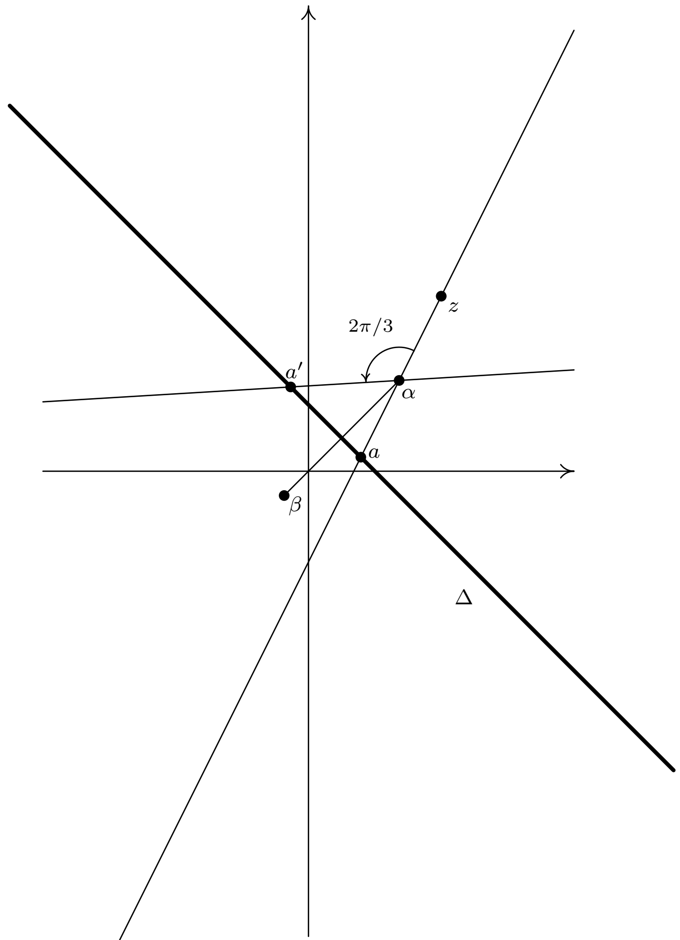
(e)

<u>Construction de a'</u> :

5-a montre que $a \in \Delta \Rightarrow a' \in \Delta$

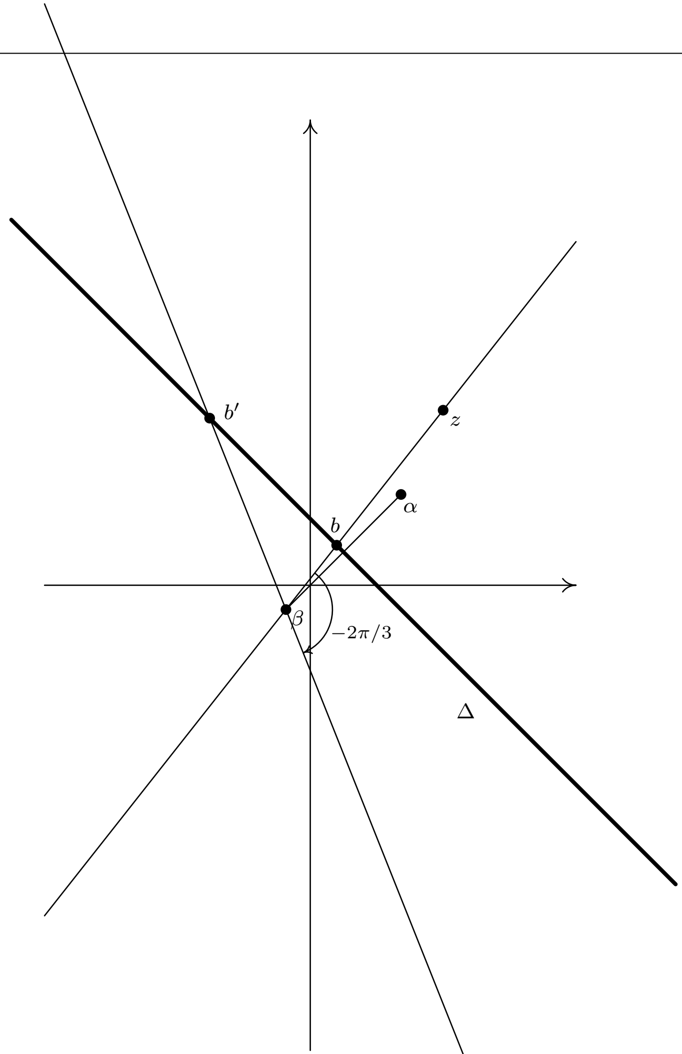
5-d montre que $(\widehat{\alpha a, \alpha a'}) \equiv \frac{2\pi}{3}[\pi]$

a' est l'intersection de Δ avec l'image de la droite αa dans la rotation de centre α et d'angle $2\pi/3$



<u>Construction de b'</u> :

De même, b' est l'intersection de Δ avec l'image de la droite βb dans la rotation de centre β et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.



Construction de z' :

$\alpha\, a\, z$ et $\beta\, b\, z$ sont alignés. **3-d** montre que $a', 1, \alpha, z'$ et $b', 1, \beta, z'$ sont cocycliques ou alignés.

On construit les cercles (ou droites) $a', 1, \alpha$ et $b', 1, \beta$ dont l'intersection (autre que 1) est le point z'.