Devoir Maison 09

Pour le lundi 15 Décembre 2025

> La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Exercice 1 obligatoire et exercice 2 (tout ou partie) pour les curieux.

Exercice 1

1. On définit les suites (a_n) et (b_n) par $a_0 = a$ et $b_0 = b$ tels que $0 < a < b$, et les relations :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad et \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < a_n < b_n$.
   En déduire que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.
   On note $M(a,b)$ leur limite commune

   (c'est la moyenne de Gauss ; on ne cherchera pas à la calculer).

   (b) Calculer $M(1,2)$ à 10^{-5} prés en justifiant la précision du résultat.

2. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad r_n = \frac{b_n}{a_n} \quad et \quad w_n = \frac{(b_n - a_n)\, {b_n}^2}{(b_n + a_n)^3}$$

   (a) Exprimer r_{n+1} et w_n en fonction de r_n.
   (b) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 < w_n < 1$.
   (c) Calculer

$$\frac{w_{n+1}}{w_n^2}$$

   en fonction de r_n, et montrer que $w_{n+1} < w_n^2$.
   (d) En déduire la majoration $\left|b_n - a_n\right| \leqslant 8\, b_n\, {w_0}^{(2^n)}$.
   (e) Déterminer une valeur de n suffisante pour que $\left|M(1,2) - a_n\right| \leqslant 10^{-8}$.

3. Les trois suites réelles (u_n), (v_n) et (w_n) sont définies par
   leurs premiers termes $0 < w_0 \leqslant v_0 \leqslant u_0$
   et, pour tout entier naturel n, les relations :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n + w_n}{3}\,; \qquad v_{n+1} = (u_n\, v_n\, w_n)^{1/3}; \qquad \frac{1}{w_{n+1}} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n} + \frac{1}{w_n}\right)$$

   (a) Soient des réels x, y, z strictement positifs ; montrer que $\frac{x+y+z}{3} \geqslant (xyz)^{1/3}$
   On étudiera les variations de $f : x \mapsto \frac{x+y+z}{3} - (xyz)^{1/3}$
   (b) En déduire que $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 < w_n \leqslant v_n \leqslant u_n$.
   (c) Montrer que (u_n) est décroissante et (w_n) croissante.
   (d) Établir que $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_{n+1} - w_{n+1} \leqslant \frac{2}{3}\,(u_n - w_n)$
   (e) En déduire que les trois suites convergent vers la même limite
   (on ne demande pas de calculer cette limite).

Exercice 2

Birapport, complexes et géométrie

Partie I : Birapport et cocyclicité

Soient A, B, C et D quatre points distincts du plan.

1. Supposons A et B et C non alignés. Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Montrer que
$$(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) \equiv \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})[\pi]$$
On pourra utiliser les triangles isocèles OCA et OCB.

2. (a) Montrer que l'ensemble des points M du plan tels que
$$(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) \equiv 0[\pi]$$
est la droite (AB).

   (b) Soit $\theta \in \mathbb{R}^*$. Montrer que l'ensemble des points M du plan tels que
$$(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) \equiv \theta[\pi]$$
est un cercle passant par A et B. On pourra considérer O le point de la médiatrice de $[AB]$ tel que $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) \equiv 2\theta[2\pi]$.

3. (a) Supposons A et B et C alignés. Montrer que A, B, C et D alignés si et seulement si $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) \equiv (\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB})[\pi]$.

   (b) Supposons A et B et C non alignés. Montrer que A, B, C et D cocyliques si et seulement si $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) \equiv (\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB})[\pi]$.

4. Conclure que A, B, C et D d'affixes complexes respectives a, b, c, d sont cocycliques ou alignés si et seulement si
$$\frac{a-c}{b-c} \times \frac{b-d}{a-d} \in \mathbb{R}$$

Partie II : Birapport et homographie

Dans tout le problème on note $E = \mathbb{C} - \left\{1, i\right\}$ et $f \begin{cases} E & \to & E \\ z & \mapsto & \frac{z+i}{z-i} \end{cases}$.

On confondra z et le point M_z d'affixe z.

Soit a, b, c, d des complexes distincts. On définit le **birapport** :
$$B(a,b,c,d) = \frac{\frac{a-c}{a-d}}{\frac{b-c}{b-d}} = \frac{a-c}{a-d} \times \frac{b-d}{b-c}$$
On rappelle que les points a, b, c, d sont cocycliques ou alignés <u>ssi</u> $B(a,b,c,d) \in \mathbb{R}$.

1. (a) Vérifier que $f(E) \subset E$.

   (b) Démontrer que f est une bijection de E sur lui même.
   On donnera l'expression de $f^{-1}(z)$.

   (c) Calculer $f \circ f(z)$ et en déduire que $f \circ f \circ f = \mathrm{Id}_E$

2. (a) Démontrer que $f\left(\mathbb{R} - \left\{1\right\}\right) = \mathcal{U} \cap E$, où $\mathcal{U}$ est le cercle unité de $\mathbb{C}$.

   (b) Soit $P = \left\{z \in E \text{ — } \mathrm{Im}\,(z) < 0\right\}$ et $D = \left\{z \in E \text{ — } \left|z\right| < 1\right\}$.
   Démontrer que $f(P) = D$.

3. Soit $a, b, c, d \in E$ distincts, d'images par f : a', b', c', d'.

   (a) Exprimer $\frac{a'-c'}{a'-d'}$ en fonction de a, c, d sous la forme la plus simple possible.

(b) Montrer que $B(a,b,c,d) = B(a',b',c',d')$.

(c) Que peut-on en déduire si les points a,b,c,d sont cocycliques ou alignés ?

(d) Montrer que a,c,d sont alignés si et seulement si $a',1,c',d'$ sont cocycliques ou alignés (calculer $B(a',1,c',d')$).

4. (a) Déterminer les complexes $z \in E$ tels que $f(z) = z$. On trouvera deux solutions, notées α et β, avec $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$.

(b) Vérifier que $\frac{\beta - i}{\alpha - i} = j^2$.

(c) Soit $z \in E - \{\alpha, \beta\}$ d'image z' par f. Montrer que

$$\frac{z' - \alpha}{z' - \beta} = j^2\,\frac{z - \alpha}{z - \beta} \tag{1}$$

5. On note Δ la médiatrice de α et β.

(a) Montrer que $f(\Delta \cap E) = \Delta \cap E$ (utiliser (1)).

(b) Montrer que 1 et i appartiennent à Δ.

(c) Soit $z \in \Delta \cap E$. Montrer que $\arg(z-\alpha) + \arg(z-\beta) \equiv 2\arg(z-i)\ [2\pi]$

(d) Pour $z \in \Delta \cap E$ et $z' = f(z)$, montrer que

$$\begin{cases} \arg(z' - \alpha) \equiv \arg(z-\alpha) + \frac{2\pi}{3}\ [\pi] \\ \arg(z' - \beta) \equiv \arg(z-\beta) - \frac{2\pi}{3}\ [\pi] \end{cases}$$

(e) Soit $z \in E - \{\alpha, \beta\}$ tel que les droites $(z\alpha)$ et $(z\beta)$ recoupent Δ en deux points distincts $a, b \in E$. Expliquer comment construire géométriquement les images a', b' de a et b, puis l'image z' de z.

PArtie II : Indications

1. S'assurer que f est bien définie sur E, et que les images se trouvent dans E.

   Pour la bijection, on cherchera les antécédents (dans $E\ldots$), ce qui donne $f^{-1}(z)$.

2. $z \in \mathbb{R} - \{1\} \Rightarrow \left|f(z)\right| = 1$ ne donne qu'une inclusion. La réciproque peut se faire algébriquement ou par une interprétation géométrique.

   Mêmes remarques pour $f(P) = D$.

3. Un calcul algébrique simple donne $\frac{a' - c'}{a' - d'} = \frac{(d-i)(a-c)}{(c-i)(a-d)}$.

   La suite en découle facilement.

4. $f(z) = z$ est équivalent à une équation du second degré à coefficients complexes.

   $(1+i)$ reste en facteur dans le calcul de $\alpha - i$ et $\beta - i$ si on remarque que $i = \frac{1}{2}(1+i)^2$.

   On utilise alors la formule **3-a** puisque $\alpha' = \alpha$ et $\beta' = \beta$.

5. Utiliser $z \in \Delta \Leftrightarrow \left|z-\alpha\right| = \left|z-\beta\right|$.

   Remarquer que Δ est la bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{z\alpha}, \overrightarrow{z\beta}\right)$