Devoir Maison 8 - Eléments de Correction

Exercice 1

1. $(\mathcal{E})$ s'écrit $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -f(-x) + (2-2x)\, e^x$, ce qui montre que f' est dérivable (somme et composée de fonctions dérivables).

   Nous pouvons dériver cette égalité, et aussi remplacer x par $-x$ (elle est valable pour tout réel), ce qui donne
   $$f''(x) = f'(-x) - 2\, x\, e^x$$
   $$f'(-x) = -f(x) + (2+2x)\, e^{-x}$$
   En substituant, f vérifie $\quad f''(x) = -f(x) + (2+2x)\, e^{-x} - 2\, x\, e^x$,

   donc f est solution de l'équation différentielle
   $$\boxed{(\mathcal{F}) \quad y'' + y = (2+2\,x)\, e^{-x} - 2\, x\, e^x}$$

2. $(\mathcal{F})$ est une équation différentielle linéaire, du second ordre, à coefficients constants.

   Son équation caractéristique $t^2 + 1 = 0$ a pour solutions $t = \pm\, i$.

   Les solutions de l'ESSMA sont donc $\quad y = A \sin x + B \cos x\,,\ A, B \in \mathbb{R}$.

   On obtient une solution particulière par la technique de superposition :

   •une solution de $y'' + y = (2\,x+2)\, e^{-x}$ sous la forme $y(x) = (a\,x+b)\, e^{-x}$

   donne $2\,a\,x^2 - 2\,a + 2\,b = 2\,x^2 + 2$ d'où $y_1(x) = (x+2)\, e^{-x}$

   •une solution de $y'' + y = -2\,x\, e^x$ sous la forme $y(x) = (a\,x+b)\, e^x$

   donne $2\,a\,x^2 + 2\,a + 2\,b = -2\,x$ d'où $y_2(x) = (-x+1)\, e^x$

   Finalement, les solutions de $(\mathcal{F})$ sont
   $$\boxed{y(x) = A \sin x + B \cos x + (x+2)\, e^{-x} + (-x+1)\, e^x\,,\ A, B \in \mathbb{R}}$$

3. Les solutions de $(\mathcal{E})$ sont donc les fonctions de cette forme que vérifient la condition, soit
   $$\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad y'(x) + y(-x) = (2-2\,x)\, e^x$$
   $$\Leftrightarrow \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \qquad (A+B)\big(\cos x - \sin x\big) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A+B=0$$
   d'où $$\boxed{f(x) = A\,(\sin x - \cos x) + (x+2)\, e^{-x} + (-x+1)\, e^x\,,\ A \in \mathbb{R}}$$