Devoir Maison 08 - Eléments de Correction

Exercice 1

1. Sous forme résolue, l'équation devient $y'' = -\dfrac{4}{x}y' - \dfrac{2}{x^2}y$.

   Ceci est possible $\boxed{\text{sur tout intervalle ne contenant pas 0}}$

2. Sur I, x ne s'annule pas. On pose $y = \dfrac{z}{x^2}$, soit $z = y\,x^2$ qui se dérive en $z' = y'\,x^2 + 2xy$, puis $z'' = y''\,x^2 + 4xy' + 2y$. L'équation (E) devient immédiatement $\boxed{z''=0}$

   D'où $z' = A$ puis $z = Ax + B$. Finalement, avec $y = \frac{z}{x^2}$, il vient $\boxed{y = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2}}$

3. Cette fois, nous effectuons le changement de variable $t = \ln(x)$ (valable sur I)
   $y(x) = y(e^t) = \phi(t)$ donc $\phi'(t) = e^t y'(e^t)$ et $\phi''(t) = e^{2t}y''(e^t) + e^t y'(e^t)$
   (E) s'écrit $e^{2t}y''(e^t)+4e^t y'(e^t)+2y(e^t) = 0$ soit encore $\boxed{(E_2) : \phi'' + 3\phi' + 2\phi = 0}$

   C'est une équation linéaire homogène du second ordre à coefficients constants. L'équation caractéristique $\alpha^2+3\alpha+2 = 0$ admet deux racines distinctes $\alpha = -2$ et $\alpha = -1$, d'où les solutions de (E_2) : $\phi = A\,e^{-t}+B\,e^{-2\,t}$. On retrouve $\boxed{y = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2}}$

Exercice 2

1. Montrons $\forall\, n \in \mathbb{N}$, u_{2n} et u_{2n+1} définis, $u_{2n} > 0$ et $u_{2n+1} > 1$ (par récurrence)

   Amorce : $u_0 = 1, u_1 = f(1) = \sqrt{2}$ vérifient les conditions

   Hérédité : Si u_{2n+1} est défini et $u_{2n+1} > 1$, alors
   $u_{2n+2} = g(u_{2n+1}) = \frac{1}{u_{2n+1}-1}$ est défini avec $u_{2n+2} > 0$
   puis ensuite $u_{2n+3} = f(u_{2n+2}) = \sqrt{1+u_{2n+2}}$ est défini avec $u_{2n+3} > 1$

   $$\boxed{(u_n) \text{ est définie et vérifie } \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{2n} > 0 \\ u_{2n+1} > 1 \end{cases}}$$

2. Résolution des équations $f(x) = x$ et $g(x) = x$:

   $$f(x) = x \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \ [^1] \\ \sqrt{1+x} = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

   $$g(x) = x \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \ [^2] \\ x = \frac{1}{x-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x^2 - x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

   $$\boxed{\alpha = \tfrac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ est la solution commune aux équations } f(x) = x \text{ et } g(x) = x}$$

3. Il est évident que :
   f est croissante sur $]0, +\infty[$ et $f(]0, +\infty[) =]1, +\infty[$
   g est décroissante sur $]1, +\infty[$ et $g(]1, +\infty[=]0, +\infty[)$

   (a) $]1, +\infty[\xrightarrow{g \searrow}]0, +\infty[\xrightarrow{f \nearrow}]1, +\infty[$ montre que
   $\boxed{\varphi = f \circ g :]1, +\infty[\to]1, +\infty[\text{ est définie décroissante}}$

   (b) $]1, +\infty[\xrightarrow{\varphi \searrow}]1, +\infty[\xrightarrow{\varphi \searrow}]1, +\infty[$ montre que
   $\boxed{\psi = \varphi \circ \varphi :]1, +\infty[\to]1, +\infty[\text{ est définie croissante}}$

   Calcul de $\psi(\alpha)$: α étant un point fixe de f et de g, nous avons
   $\varphi(\alpha) = f\left(g(\alpha)\right) = f(\alpha) = \alpha$, puis, $\psi(\alpha) = \varphi\left(\varphi(\alpha)\right) = \varphi(\alpha) = \alpha$
   $\boxed{\psi(\alpha) = \alpha}$

4. **Calcul de $\psi(x)$:** $\psi = \varphi \circ \varphi$ où $\varphi(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x-1}} = \sqrt{\frac{x}{x-1}}$

   donc $\boxed{\psi(x) = \sqrt{\dfrac{\sqrt{\frac{x}{x-1}}}{\sqrt{\frac{x}{x-1}}-1}} = \sqrt{\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}}}$

   Pour $x > 1$: (les quantités transformées étant positives)

   $$\begin{aligned} \psi(x) > x &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}} > x^2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)}{x-(x-1)} > x^2 \\ &\Leftrightarrow x + \sqrt{x^2-x} > x^2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-x} > x^2 - x \\ &\Leftrightarrow x^2 - x < 1 \end{aligned}$$

   Finalement, sur $]1, +\infty[$: $\boxed{\psi(x) > x \quad \Leftrightarrow \quad 1 < x < \alpha}$

5. $(v_n) = (u_{1+4n})$

   (a) Nous avons $v_0 = u_1 = f(u_0) = \sqrt{1+1}$ ce qui donne $\boxed{v_0 = \sqrt{2} \in]1, \alpha[}$

1. f est définie sur $]0, +\infty[$
2. g est définie sur $]1, +\infty[$

$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_{4n+1}$

$\Rightarrow u_{4n+2} = g(v_n) \Rightarrow u_{4n+3} = f \circ g(v_n) = \varphi(v_n)$

$\Rightarrow u_{4n+4} = g \circ \varphi(v_n) \Rightarrow u_{4n+5} = f \circ g \circ \varphi(v_n) = \varphi \circ \varphi(v_n)$

Conclusion $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = \psi(v_n)}$

(b) Sur $]1, +\infty[$, ψ est croissante, $\psi(]1, +\infty[) =]1, +\infty[$ et $\psi(\alpha) = \alpha$.

Ceci montre que l'intervalle $]1, +\infty[$ est stable par ψ.

Comme $v_0 \in]1, \alpha[$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \psi(v_n)$,

une récurrence simple prouve que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_n \in]1, \alpha[$.

Sur cet intervalle, $\psi(x) > x$ montre que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \psi(v_n) > v_n$.

Croissante et majorée (par α), la suite (v_n) est convergente.

ψ étant continue, la limite est α, l'unique point fixe de ψ.

Conclusion $\boxed{(v_n) = (u_{4n+1}) \text{ converge vers } \alpha}$

6. On ne demande que les limites des suites.

Comme α appartient à l'ensemble de définition de f et g qui sont continues :

$$\left.\begin{array}{r}(u_{4n+1}) \to \alpha \\ u_{4n+2} = g(u_{4n+1})\end{array}\right\} \Rightarrow (u_{4n+2}) \to g(\alpha) = \alpha$$

$$\left.\begin{array}{r}(u_{4n+2}) \to \alpha \\ u_{4n+3} = f(u_{4n+2})\end{array}\right\} \Rightarrow (u_{4n+3}) \to f(\alpha) = \alpha$$

$$\left.\begin{array}{r}(u_{4n+3}) \to \alpha \\ u_{4n+4} = g(u_{4n+3})\end{array}\right\} \Rightarrow (u_{4n+4}) \to g(\alpha) = \alpha$$

On peut (hors sujet) préciser que :

Les éléments de la suite (u_{4n+1}) sont dans l'intervalle $]1, \alpha]$ où g est continue décroissante.

On en déduit les propriétés de son image $\big(g(u_{4n+1})\big) = (u_{4n+2})$:

— (u_{4n+1}) croissante $\Rightarrow$ (u_{4n+2}) décroissante

— $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{4n+1} \in [1, \alpha[\Rightarrow u_{4n+2} \in [g(\alpha), +\infty[= [\alpha, +\infty[$

De même, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{4n+2} \in [\alpha, +\infty[$ où f est continue croissante. On en déduit les propriétés de son image $\big(f(u_{4n+2})\big) = (u_{4n+3})$:

— (u_{4n+2}) décroissante $\Rightarrow$ (u_{4n+3}) décroissante

— $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{4n+2} \in [\alpha, +\infty[\Rightarrow u_{4n+3} \in [f(\alpha), +\infty[= [\alpha, +\infty[$

Enfin, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{4n+3} \in [\alpha, +\infty[$ où g est continue décroissante.

On en déduit les propriétés de son image $\big(g(u_{4n+3})\big) = (u_{4n+4})$:

— (u_{4n+3}) décroissante $\Rightarrow$ (u_{4n+4}) décroissante

— $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{4n+3} \in [\alpha, +\infty[\Rightarrow u_{4n+4} \in]0, g(\alpha)] =]0, \alpha]$

7. Nous en déduisons que la suite (u_n) converge vers α puisque :

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{r}(u_{4n}) \to \alpha \\ (u_{4n+2}) \to \alpha\end{array}\right\} \Rightarrow \quad (u_{2n}) \to \alpha \\ \left.\begin{array}{r}(u_{4n+1}) \to \alpha \\ (u_{4n+3}) \to \alpha\end{array}\right\} \Rightarrow \quad (u_{2n+1}) \to \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge vers } \alpha}$$

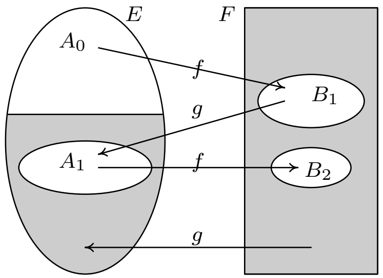
Exercice 3

Partie -A-

1. Soit a un élément de E. Par définition,

$$a \in E - \mathcal{E} \Leftrightarrow a \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}\,,\ a \notin A_n$$

En particulier $a \notin A_0 = E - g(F)$ donc $a \in g(F)$ admet au moins un antécédent dans F. Cet antécédent ne peut qu'être unique puisque g est injective.



Conclusion $\boxed{\text{tout élément de } A - \mathcal{E} \text{ admet un et un seul antécédent par } g.}$

On définit ainsi une application $G \begin{cases} A - \mathcal{E} & \to & F \\ a & \mapsto & x \end{cases}$ avec $g(x) = a$

2. $h : E \to F$ définie par $h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} & x \in \mathcal{E} \\ G(x) & \text{si} & x \notin \mathcal{E} \end{cases}$ est bien une application puisque tout élément de E a une image et une seule. En effet, tout élément de E est soit dans $\mathcal{E}$, soit dans $E - \mathcal{E}$, mais pas dans les deux en même temps, et dans chacun des deux cas, il admet une image unique (puisque f est une application s'il est dans $\mathcal{E}$, et d'après le résultat précédent dans le cas contraire)

$\boxed{h \text{ définit une application de } E \text{ vers } F}$

3. Procédons par double implication.

— Montrons $x \in \mathcal{E} \Rightarrow h(x) \in \mathcal{F}$.

dans ce cas, $h(x) = f(x)$ et $x \in \mathcal{E} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}\,,\ x \in A_n$.

Ceci prouve que $h(x) \in f(A_n) = B_{n+1}$ donc $h(x) \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}^*} B_i = \mathcal{F}$.

— Montrons la réciproque : $h(x) \in \mathcal{F} \Rightarrow x \in \mathcal{E}$ en procédant par l'absurde.

Si $y = h(x) \in \mathcal{F}$ et $x \notin \mathcal{E}$, alors $h(x) = G(x)$ soit $g(y) = x$.

Mais $y \in \mathcal{F} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}^*} B_i \Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}^*,\ y \in B_n \Rightarrow g(y) \in g(B_n)$ soit $x \in A_n$,

ce qui est en contradiction avec $x \notin \mathcal{E}$.

$$\boxed{x \in \mathcal{E} \Leftrightarrow h(x) \in \mathcal{F}}$$

4. — Montrons que h est injective :

si $x, y \in E$ vérifient $h(x) = h(y)$, deux cas se présentent :

— soit $h(x) = h(y) \in \mathcal{F}$: ce qui précède prouve que $x, y \in \mathcal{E}$.

L'égalité $h(x) = h(y)$ se traduit par $f(x) = f(y)$ d'où $x = y$ (f est injective)

— soit $h(x) = h(y) \notin \mathcal{F}$: ce qui précède prouve que $x, y \notin \mathcal{E}$.

L'égalité $h(x) = h(y)$ se traduit par $G(x) = G(y) = t$ soit $g(t) = x = y$.

— Montrons que h est surjective : soit $\forall\, y \in F$, $\exists\, x \in E$, $y = h(x)$.

Deux cas sont possibles :

— soit $y \in \mathcal{F}$: la question **-3-** montre qu'il faut chercher x dans $\mathcal{E}$ avec $f(x) = y$.

$y \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}^*} B_i \Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}^*,\ y \in B_n = f(A_{n-1}) \quad (n-1 \in \mathbb{N})$.

y admet donc un antécédent par f, antécédent qui se trouve dans A_{n-1}, donc dans $\mathcal{E}$, d'où l'existence de x.

— soit $y \notin \mathcal{F}$: la question **-3-** montre qu'il faut chercher x dans $E - \mathcal{E}$, avec $G(x) = y$. Pour montrer que l'élément $x = g(y)$ convient, il suffit de prouver

que $g(y) \notin \mathcal{E}$, ce qui est vrai car, dans l'hypothèse contraire nous aurions :

$$\exists\, n \in \mathbb{N}^*,\ g(y) \in A_n \Rightarrow g(x) \in g(B_n) \Rightarrow \exists\, z \in B_n,\ g(y) = g(z)$$

Or g est injective, donc $y = z$ avec $y \notin \mathcal{F}$ et $z \in \mathcal{F}$ d'où la contradiction.

$$\boxed{h : E \to F \text{ est bijective}}$$

Partie -B- ***(application pratique)***

$f \begin{cases} [0,1[& \to & [0,1] \\ x & \mapsto & x \end{cases}$ et $g : \begin{cases} [0,1] & \to [0,1[\\ x & \mapsto \quad x/2 \end{cases}$ sont injectives.

5. Il est évident que $g\big([0,1]\big) = \left[0, \frac{1}{2}\right]$ donc $A_0 = \left]\frac{1}{2}, 1\right[$.

Ensuite $B_1 = f(A_0) = \left]\frac{1}{2}, 1\right[$ et $A_1 = g(B_1) = \left]\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right[$

Une récurrence simple montre que $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\ A_n = B_{n+1} = \left]\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right[}$

Ce qui donne $\mathcal{E} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left]\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right[$ et $[0,1[- \mathcal{E} = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{2^n} \;—\; n \in \mathbb{N}\right\}$

6. Si $x = 0$ ou x de la forme $\frac{1}{2^n}$,

alors $h(x) = 2\,x$

Dans les autres cas, $h(x) = x$

d'où la représentation ci-contre.