Devoir Maison 08

Pour le lundi 1 Décembre 2025

> La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Exercice 1

On se propose de résoudre l'équation différentielle $(E) : x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$ en utilisant deux méthodes différentes. Il est donc nécessaire de traiter les questions **2** et **3 indépendamment**.

1. L'équation (E) est-elle résoluble ? Quelles limitations ceci introduit-il ?
   Pour la suite de cet exercice, nous nous limiterons à $x \in I =]0, +\infty[$

2. Transformer (E) en utilisant le changement de fonction inconnue $z(x) = x^2\, y(x)$.
   Former l'équation (E_1) dont la fonction z est solution, puis la résoudre.
   En déduire les solutions de (E) sur I.
3. Cette fois, on transforme (E) en utilisant le changement de variable $x = e^t$. Quelle est la nouvelle équation (E_2) obtenue ? Résoudre cette équation et en déduire les solutions de (E) sur I. Comparer avec le résultat de la question précédente.

Exercice 2

On considère les fonctions

f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1 + x}$

g définie sur $]1, +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{1}{x - 1}$.

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme $u_0 = 1$ vérifiant $\forall\, n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{2n+1} = f(u_{2n}) \\ u_{2n+2} = g(u_{2n+1}) \end{cases}$

1. Justifier l'existence de la suite et montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{2n} > 0 \\ u_{2n+1} > 1 \end{cases}$
2. Montrer que les équations $f(x) = x$ et $g(x) = x$ ont une solution commune et une seule (on la notera α).
3. (a) Montrer que la fonction $\varphi = f \circ g$ est définie et décroissante sur $]1, +\infty[$.
   (b) Montrer que la fonction $\psi = \varphi \circ \varphi$ est définie et croissante sur $]1, +\infty[$.
   Calculer $\psi(\alpha)$.
4. Exprimer $\psi(x)$ en fonction de x.
   Montrer que, sur $]1, +\infty[$: $\psi(x) - x > 0 \Leftrightarrow x \in]1, \alpha[$.
5. Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{4n+1}$.
   (a) Montrer que $1 < v_0 < \alpha$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \psi(v_n)$.
   (b) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et trouver sa limite.
6. On considère les suites $(u_{4n+2})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{4n+3})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{4n+4})_{n\in\mathbb{N}}$.
   Montrer qu'elles s'expriment simplement à l'aide de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   En déduire qu'elles convergent et trouver leurs limites.
7. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et trouver sa limite.

Exercice 3 (Pour les plus curieux, variation sur le théorème de Bernstein)
Partie -A ***(théorème de Cantor[1]- Bernstein[2])***

E et F sont deux ensembles.

On suppose qu'il existe deux injections $f : E \to F$ et $g : F \to E$.

On définit les deux suites d'ensembles (A_n) et (B_n) par

$$A_0 = E - g(F)\,, \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\,,\; B_{n+1} = f(A_n)\,, \quad A_{n+1} = g(B_{n+1})$$

On pose $\mathcal{E} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et $\mathcal{F} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} B_n$

1. Montrer que tout élément a de $E - \mathcal{E}$ possède un unique antécédent par g.
   On le notera $G(a)$.
2. Montrer que l'on définit bien une application h de E dans F en posant :
$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in \mathcal{E} \\ G(x) & \text{si} \quad x \notin \mathcal{E} \end{cases}$$
3. Montrer que $\forall\, x \in E\,, \quad x \in \mathcal{E} \Leftrightarrow h(x) \in \mathcal{F}$.
4. Montrer que h est une bijection de E sur F.

Partie -B- Création d'une bijection

On prend ici $E = [0, 1[\,,\; F = [0, 1]$ et f et g définies par

$$f(x) = x \qquad g(x) = \frac{x}{2}$$

5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, expliciter A_n et B_n .
6. Déterminer h comme définie dans la partie **-A-**, et donner la représentation graphique de cette bijection de [0,1[sur [0,1].

1. Georg CANTOR (1845-1918) mathématicien Allemand.
2. Félix BERNSTEIN (1878-1956), mathématicien Allemand, élève de Cantor