Devoir Maison 7 - Eléments de Correction

Exercice 1
Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\sin x \cos x}{(1+\cos x)^2}$

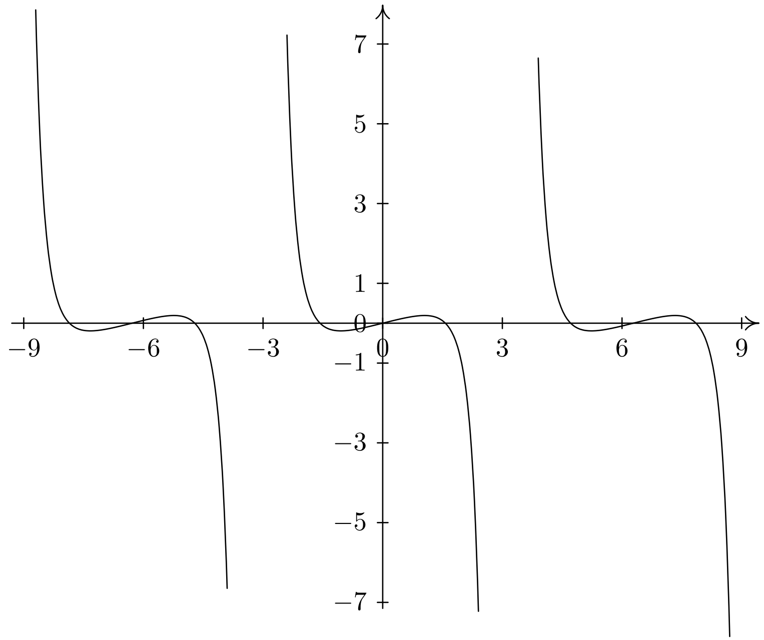
1. La fonction est définie pour tout réel x tel que $1+\cos x \neq 0$
   or $1+\cos x = 0 \Leftrightarrow x \equiv \pi[2\pi]$ donc le domaine de définition D de f est $\boxed{D = \mathbb{R} - \{\pi[2\pi]\}}$.

2. $\forall x \in D, -x \in D$ et $f(-x) = \dfrac{\sin(-x)\cos(-x)}{(1+\cos(-x))^2} = \dfrac{-\sin x \cos x}{(1+\cos x)^2} = -f(x)$ donc f est impaire.

3. $\forall x \in D, f(x+2\pi) = \dfrac{\sin(x+2\pi)\cos(x+2\pi)}{(1+\cos(x+2pi))^2} = \dfrac{\sin x \cos x}{(1+\cos x)^2} = f(x)$.
   f est périodique de période 2π donc on obtient toute la courbe représentative de f à partir de celle construite sur $]-\pi;\pi[$ par itération. Sachant que de plus f est impaire et que la courbe est donc symétrique par rapport à l'origine on peut encore restreindre l'étude à l'intervalle $[0;\pi[$.

4. (a) f est dérivable sur $[0;\pi[$ en tant que produit et quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0;\pi[$ avec un dénominateur ne s'annulant pas sur $[0;\pi[$.
$$\begin{aligned}\forall x \in [0;\pi[, f'(x) &= \frac{(\cos^2 x - \sin^2 x)(1+\cos x)^2 + 2(1+\cos x)\sin^2 x \cos x}{(1+\cos x)^4}\\ &= \frac{\cos^2 x - \sin^2 x + \cos^3 x - \sin^2 x \cos x + 2\sin^2 x \cos x}{(1+\cos x)^3}\\ &= \frac{\cos^2 x - 1 + \cos^2 x + \cos^3 x + \cos x - \cos^3 x}{(1+\cos x)^3}\\ &= \frac{2\cos^2 x + \cos x - 1}{(1+\cos x)^3}\\ &= \frac{(2\cos x - 1)(\cos x + 1)}{(1+\cos x)^3}\\ &= \frac{2\cos x - 1}{(1+\cos x)^2}\end{aligned}$$
   Pour tout réel x appartenant à $[0;\pi[$, $(1+\cos x)^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $2\cos x - 1$
   $2\cos x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0;\frac{\pi}{3}]$ alors f est croissante sur $[0;\frac{\pi}{3}]$ et décroissante sur $[\frac{\pi}{3};\pi[$

   (b) $f(x) = \cos(x) \times \left(\dfrac{x-\pi}{\cos(x)-\cos(\pi)}\right)^2 \times \dfrac{\sin(x) - sin(\pi)}{x-\pi} \times \dfrac{1}{x-\pi}$ et il reste à utiliser les limites des taux d'accroissements, et on obtient $\boxed{\lim_{x\to\pi^-} f(x) = -\infty}$

5. 

Exercice 2

1. On définit sur $\mathbb{R}^2$ la relation $\triangleleft$ par
$$(x,y) \triangleleft (x',y') \Leftrightarrow ((x < x') \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leq y'))$$
   (a) Montrons que ceci définit une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$.
   — La relation est réflexive : $x = xety?y$ impliquent $(x,y) \triangleleft (x,y)$.
   — La relation est antisymétrique : si $(x,y) \triangleleft (x',y')$ et et $(x',y') \triangleleft (x,y)$, alors on a nécessairement que $x = x'$ (si $x < x'$ par exemple, on ne peut avoir $(x',y') \triangleleft (x,y)$).
   Mais alors, on a à la fois $y \leq y'$ d'après la première relation, et aussi $y' \leq y$ d'après la seconde.
   On en déduit que $x = x'$ et $y = y'$.
   — La relation est transitive : si $(x,y) \triangleleft (x',y')$ et $(x',y') \triangleleft (x'',y'')$, alors plusieurs cas sont possibles :
     — Premier cas : $x = x'$ et $x' = x''$, dans ce cas, on a $y \leq y'$ et $y' \leq y''$ donc $y \leq y''$ et donc $(x,y) \triangleleft (x'',y'')$.
     — Second cas : $x = x'$ et $x' < x''$, dans ce cas, on a $x < x''$ et donc $(x,y) \triangleleft (x'',y'')$.
     — Troisième cas : $x < x'$ et $x' = x''$, dans ce cas, on a $x < x''$ et donc $(x,y) \triangleleft (x'',y'')$.

On obtient une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$.

(b) L'ordre ainsi obtenu est total car deux éléments sont toujours comparables.

(c) Les majorants de $\mathcal{D}$ sont de la forme $(1, y)$ avec $y \geq 0$ ou de la forme (x, y) avec $x > 1$.

(d) Représenter $\mathcal{D}$ et l'ensemble de ses majorants dans le plan euclidien.

(e) La borne supérieure et le plus grand élément de $\mathcal{D}$ sont $(1, 0)$.

2. (a) Montrons que $\ll$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$.
   - La relation est réflexive : on a $x \leq x$ et $y \leq y$.
   - La relation est antisymétrique : si $(x, y) \ll (x', y')$ et $(x', y') \ll (x, y)$ alors on a à la fois $x \leq x'$ et $x' \leq x$ et donc $x = x'$ et de même $y = y'$.
   - La relation est transitive : si $(x1, y1) \ll (x2, y2)$ et $(x2, y2) \ll (x3, y3)$ alors $x1 \leq x2 \leq x3$ et $y1 \leq y2 \leq y3$ donc $(x1, y1) \ll (x3, y3)$.

   On obtient une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$.

(b) L'ordre est partiel. En effet l'ordre n'est pas total, car on ne peut pas comparer $(0, 1)$ et $(1, 0)$.

(c) Procédons par analyse-synthèse.
   - Analyse : soit (x, y) un majorant de $\mathcal{D}$. Alors $(1, 0) \ll (x, y)$ et donc $x \geq 1$. De même, $(0, 1) \ll (x, y)$ et donc $y \geq 1$. Ainsi, on a $x \geq 1$ et $y \geq 1$.
   - Synthèse : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \geq 1$ et $y \geq 1$.
     Alors (x, y) est un majorant de $\mathcal{D}$, puisque tout élément (x_0, y_0) de $\mathcal{D}$ vérifie $x_0^2 + y_0^2 \leq 1$, et donc $x_0 \leq 1$ et $y_0 \leq 1$.
   - On en déduit que l'ensemble des majorants de $\mathcal{D}$ est $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{tel que } x \geq 1 \text{ et } y \geq 1\right\}$.

(d) Représenter $\mathcal{D}$ et l'ensemble de ses majorants dans le plan euclidien.

(e) $\mathcal{D}$ admet une borne supérieure qui est $(1, 1)$ mais pas de plus grand élément puisque $(1, 1)$ n'appartient pas à $\mathcal{D}$.