

Devoir Maison 07 - Eléments de Correction

Exercice 11. Calcul de A^2 et A^3 :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_A \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A^2} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A^3}$$

$$\text{donc } A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A^3 = O$$

pour $n \geq 3$, $(n-3) \geq 0$ donc $A^n = A^{n-3} \times A^3 = A^{n-3} \times O = O$ pour $n > 2$, $A^n = O$.

2.

$$\begin{aligned} M(x)M(y) &= \left[I + xA + \frac{x^2}{2}A^2 \right] \left[I + yA + \frac{y^2}{2}A^2 \right] \\ &= I^2 + yIA + \frac{y^2}{2}IA^2 + xAI + xyA^2 + x\frac{y^2}{2}A^3 + \frac{x^2}{2}IA^2 + \frac{x^2}{2}yA^3 + \frac{x^2}{2}\frac{y^2}{2}A^4 \\ &= I + (x+y)A + \left(\frac{x^2}{2} + xy + \frac{y^2}{2} \right) A^2 \quad (\text{les autres termes s'en vont}) \\ &= I + (x+y)A + \frac{x^2 + 2xy + y^2}{2}A^2 = I + (x+y)A + \frac{(x+y)^2}{2}A^2 \end{aligned}$$

on a bien : $M(x)M(y) = M(x+y)$

3. On montre par récurrence que $(M(x))^n = M(nx)$:

vrai au rang 0 ;

si vrai au rang n , alors

$$[M(x)]^{n+1} = [M(x)]^n M(x) = M(nx)M(x) = M(nx+x) = M((n+1)x)$$

donc ppte héréditaire, donc on a bien : $\forall n \in \mathbb{N}, (M(x))^n = M(nx)$

$$M(0) = I + 0A + 0A^2 = IM(0) = I$$

$$4. M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{x^2}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2/2 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$5. (M(x))^n = M(nx) = \begin{pmatrix} 1 & nx & (nx)^2/2 \\ 0 & 1 & nx \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & nx & n^2x^2/2 \\ 0 & 1 & nx \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. $M(x)$ est triangulaire et aucun élément de la diagonale n'est nul, donc $M(x)$ est inversible.

On a vu que $M(x)M(y) = M(x+y)$ et que $M(0) = I$; pour $y = -x$, on obtient : $M(x)M(-x) = M(x-x) = M(0) = I$; donc $M(x)$ est inversible et $[M(x)]^{-1} = M(-x)$

$$\text{Et donc : } [M(x)]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -x & (-x)^2/2 \\ 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -x & x^2/2 \\ 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$7. B \text{ est la matrice } M(4) \text{ donc } B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B^n = \begin{pmatrix} 1 & 4n & 8n^2 \\ 0 & 1 & 4n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Méthode du pivot :

$$\text{puisque } A^3 = O \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - 8L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 4L_3 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & | & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{On retrouve bien } B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9. On obtient une structure de groupe pour la multiplication.