
PROBLÈME 1. IND § SOL *Théorème de Knaster-Tarski et applications*

Soit $(\mathrm{F}, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné. On rappelle que $\preccurlyeq$ est une relation binaire sur F qui est réflexive, antisymétrique et transitive.

- ▷ $(\mathrm{F}, \preccurlyeq)$ est dit complet si toute partie non vide Ω de F admet une borne supérieure et une borne inférieure dans F.
- ▷ Une fonction $\phi : \mathrm{F} \to \mathrm{F}$ est dite croissante si pour tout $(x, y) \in \mathrm{F}^2$, $\big(x \preccurlyeq y \implies \phi(x) \preccurlyeq \phi(y)\big)$.

Partie I – Étude de quelques exemples

1. Soit $(\mathrm{F}, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné complet. Montrer que $(\mathrm{F}, \preccurlyeq)$ admet un plus grand et un plus petit élément.

2. Donner un exemple d'ensemble ordonné $(\mathrm{F}, \preccurlyeq)$ non complet.

3. Soit E un ensemble. Dans cette question, on pose $\mathrm{F} := \mathscr{P}(\mathrm{E})$.

a. Justifier que $\subset$ est une relation d'ordre sur F.

b. Soit $\Omega \subset \mathrm{F}$ tel que $\Omega \neq \varnothing$. On note $\mathscr{M}$ l'ensemble des majorants de Ω dans $(\mathrm{F}, \subset)$. Vérifier que

$$\mathscr{M} = \left\{ \mathrm{M} \subset \mathrm{E}\,;\ \bigcup_{\mathrm{X} \in \Omega} \mathrm{X} \subset \mathrm{M} \right\}$$

c. En déduire que Ω admet une borne supérieure dans $(\mathrm{F}, \subset)$.

d. Démontrer que $(\mathrm{F}, \subset)$ est complet.

Partie II – Théorème de Knaster-Tarski

Soit $(\mathrm{F}, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné non vide et $f : \mathrm{F} \to \mathrm{F}$ une application croissante.

1. Montrer que f n'admet pas nécessairement un point fixe. INDICATION : contre-exemple dans $(\mathbb{R}, \leqslant)$.

2. On suppose dans cette question que $(\mathrm{F}, \preccurlyeq)$ est complet.

a. Montrer que $\Omega := \{x \in \mathrm{F}\,;\ x \preccurlyeq f(x)\}$ est non vide. INDICATION : utiliser le résultat du I.1.

b. On pose $x_0 := \sup \Omega$. Établir que $x_0 \in \Omega$. INDICATION : vérifier que $f(x_0)$ est un majorant de Ω.

c. Montrer que Ω est stable par f puis en déduire que x_0 est un point fixe de f.

d. Vérifier que x_0 est le plus grand des points fixes de f *(Théorème de Knaster-Tarski)*.

Partie III – Deux applications

1. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une application croissante. Montrer que f admet un point fixe.

2. Soit E et F des ensembles, $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \to \mathrm{E}$ des injections. L'objectif est de démontrer l'existence d'une bijection $h : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ *(Théorème de Cantor-Bernstein-Schröder)*.

a. Montrer que $\phi : \mathscr{P}(\mathrm{E}) \to \mathscr{P}(\mathrm{E})$ définie par $\phi(\mathrm{X}) := \mathrm{E} \setminus g\big(\mathrm{F} \setminus f(\mathrm{X})\big)$ admet un point fixe.

b. Construire une bijection de E sur F au moyen de f, g et d'un point fixe X_0 de ϕ.

INDICATION : on méditera la figure ci-contre :