

**PROBLÈME 1. IND § SOL**

*Théorème de Knaster-Tarski et applications*

Soit  $(F, \preceq)$  un ensemble ordonné. On rappelle que  $\preceq$  est une relation binaire sur  $F$  qui est réflexive, antisymétrique et transitive.

- ▷  $(F, \preceq)$  est dit complet si toute partie non vide  $\Omega$  de  $F$  admet une borne supérieure et une borne inférieure dans  $F$ .
- ▷ Une fonction  $\phi : F \rightarrow F$  est dite croissante si pour tout  $(x, y) \in F^2$ ,  $(x \preceq y \implies \phi(x) \preceq \phi(y))$ .

**Partie I – Étude de quelques exemples**

1. Soit  $(F, \preceq)$  un ensemble ordonné complet. Montrer que  $(F, \preceq)$  admet un plus grand et un plus petit élément.
2. Donner un exemple d'ensemble ordonné  $(F, \preceq)$  non complet.
3. Soit  $E$  un ensemble. Dans cette question, on pose  $F := \mathcal{P}(E)$ .
  - a. Justifier que  $\subset$  est une relation d'ordre sur  $F$ .
  - b. Soit  $\Omega \subset F$  tel que  $\Omega \neq \emptyset$ . On note  $\mathcal{M}$  l'ensemble des majorants de  $\Omega$  dans  $(F, \subset)$ . Vérifier que

$$\mathcal{M} = \left\{ M \subset E; \bigcup_{X \in \Omega} X \subset M \right\}$$

- c. En déduire que  $\Omega$  admet une borne supérieure dans  $(F, \subset)$ .
- d. Démontrer que  $(F, \subset)$  est complet.

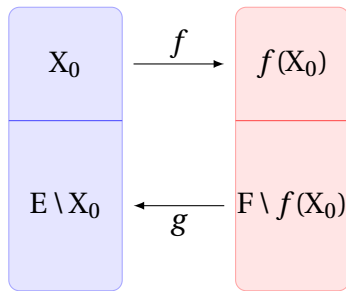
**Partie II – Théorème de Knaster-Tarski**

Soit  $(F, \preceq)$  un ensemble ordonné non vide et  $f : F \rightarrow F$  une application croissante.

1. Montrer que  $f$  n'admet pas nécessairement un point fixe. INDICATION : contre-exemple dans  $(\mathbb{R}, \leq)$ .
2. On suppose dans cette question que  $(F, \preceq)$  est complet.
  - a. Montrer que  $\Omega := \{x \in F; x \preceq f(x)\}$  est non vide. INDICATION : utiliser le résultat du I.1.
  - b. On pose  $x_0 := \sup \Omega$ . Établir que  $x_0 \in \Omega$ . INDICATION : vérifier que  $f(x_0)$  est un majorant de  $\Omega$ .
  - c. Montrer que  $\Omega$  est stable par  $f$  puis en déduire que  $x_0$  est un point fixe de  $f$ .
  - d. Vérifier que  $x_0$  est le plus grand des points fixes de  $f$  (*Théorème de Knaster-Tarski*).

### Partie III – Deux applications

1. Soit  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  une application croissante. Montrer que  $f$  admet un point fixe.
2. Soit  $E$  et  $F$  des ensembles,  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow E$  des injections. L'objectif est de démontrer l'existence d'une bijection  $h : E \rightarrow F$  (*Théorème de Cantor-Bernstein-Schröder*).
  - a. Montrer que  $\phi : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$  définie par  $\phi(X) := E \setminus g(F \setminus f(X))$  admet un point fixe.
  - b. Construire une bijection de  $E$  sur  $F$  au moyen de  $f$ ,  $g$  et d'un point fixe  $X_0$  de  $\phi$ .



INDICATION : on méditera la figure ci-contre :