

LLG RECUEIL DE PROBLÈMES # 8 ↪ ENSEMBLES, APPLICATIONS ET RELATIONS PCSI 2

PROBLÈME 1. IND § SOL

Théorème de Knaster-Tarski et applications

Soit (F, \preccurlyeq) un ensemble ordonné. On rappelle que \preccurlyeq est une relation binaire sur F qui est réflexive, antisymétrique et transitive.

- ▷ (F, \preccurlyeq) est dit complet si toute partie non vide Ω de F admet une borne supérieure et une borne inférieure dans F .
- ▷ Une fonction $\phi : F \rightarrow F$ est dite croissante si pour tout $(x, y) \in F^2$, $(x \preccurlyeq y \implies \phi(x) \preccurlyeq \phi(y))$.

Partie I – Étude de quelques exemples

1. Soit (F, \preccurlyeq) un ensemble ordonné complet. Montrer que (F, \preccurlyeq) admet un plus grand et un plus petit élément.
2. Donner un exemple d'ensemble ordonné (F, \preccurlyeq) non complet.
3. Soit E un ensemble. Dans cette question, on pose $F := \mathcal{P}(E)$.
 - a. Justifier que \subset est une relation d'ordre sur F .
 - b. Soit $\Omega \subset F$ tel que $\Omega \neq \emptyset$. On note \mathcal{M} l'ensemble des majorants de Ω dans (F, \subset) . Vérifier que

$$\mathcal{M} = \left\{ M \subset E; \bigcup_{X \in \Omega} X \subset M \right\}$$

- c. En déduire que Ω admet une borne supérieure dans (F, \subset) .
- d. Démontrer que (F, \subset) est complet.

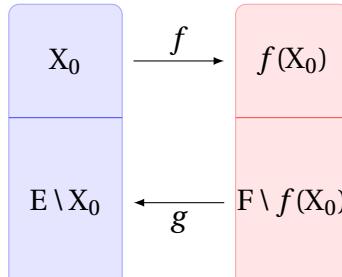
Partie II – Théorème de Knaster-Tarski

Soit (F, \preccurlyeq) un ensemble ordonné non vide et $f : F \rightarrow F$ une application croissante.

1. Montrer que f n'admet pas nécessairement un point fixe. INDICATION : contre-exemple dans (\mathbb{R}, \leq) .
2. On suppose dans cette question que (F, \preccurlyeq) est complet.
 - a. Montrer que $\Omega := \{x \in F; x \preccurlyeq f(x)\}$ est non vide. INDICATION : utiliser le résultat du I.1.
 - b. On pose $x_0 := \sup \Omega$. Établir que $x_0 \in \Omega$. INDICATION : vérifier que $f(x_0)$ est un majorant de Ω .
 - c. Montrer que Ω est stable par f puis en déduire que x_0 est un point fixe de f .
 - d. Vérifier que x_0 est le plus grand des points fixes de f (*Théorème de Knaster-Tarski*).

Partie III – Deux applications

1. Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une application croissante. Montrer que f admet un point fixe.
2. Soit E et F des ensembles, $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow E$ des injections. L'objectif est de démontrer l'existence d'une bijection $h : E \rightarrow F$ (*Théorème de Cantor-Bernstein-Schröder*).
 - a. Montrer que $\phi : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ définie par $\phi(X) := E \setminus g(F \setminus f(X))$ admet un point fixe.
 - b. Construire une bijection de E sur F au moyen de f , g et d'un point fixe X_0 de ϕ .



INDICATION : on méditera la figure ci-contre :