CORRIGÉS ✒ ENSEMBLES, APPLICATIONS ET RELATIONS BINAIRES

SOLUTION 1.

Partie I – Théorème de Knaster-Tarski

1. L'ensemble ordonné usuel $(\mathbb{R},\leqslant)$ et l'application $x\mapsto x+1$ fournissent un contre-exemple évident.

2. a. Comme E est complet, E admet un plus petit élément μ (cf. partie I). Comme $f(\mu)\in\mathrm{E}$, on a $f(\mu)\geqslant\mu$, d'où $\Omega\neq\varnothing$. Montrer que $\Omega:=\left\{x\in\mathrm{E}\,;\,x\preccurlyeq f(x)\right\}$ est non vide.

b. Soit x dans Ω. Comme $x\preccurlyeq x_0$, on a $f(x)\preccurlyeq f(x_0)$ par croissance de f. Comme $x\preccurlyeq f(x)$, on a $x\preccurlyeq f(x_0)$ par transitivité. Ainsi $f(x_0)$ est un majorant de Ω. On en déduit que $x_0\preccurlyeq f(x_0)$ d'où $x_0\in\Omega$.

c. Soit $x\in\Omega$. On a $x\preccurlyeq f(x)$. Ainsi, par croissance de f, $f(x)\preccurlyeq f\big(f(x)\big)$. Ainsi $f(x)\in\Omega$. Comme $x_0\in\Omega$ (cf. la question précédente), on en déduit que $f(x_0)\in\Omega$ d'où $f(x_0)\preccurlyeq x_0$. Puisque $x_0\preccurlyeq f(x_0)$ (on rappelle que $x_0\in\Omega$), on a $f(x_0)=x_0$ par anti-symétrie de $\preccurlyeq$.

d. Soit x_1 un point fixe de f. On a alors $f(x_1)\preccurlyeq x_1$ donc $x_1\in\Omega$. Ainsi $x_1\preccurlyeq x_0$: x_0 est le plus grand point fixe de l'application f.

Partie II – Deux applications

1. Par le théorème de Knaster-Tarski, il suffit de démontrer que l''ensemble ordonné usuel $([0,1],\leqslant)$ est complet. Soit A une partie non vide $[0,1]$. Par la propriété de la borne supérieure, A admet une borne supérieure x_0 dans $\mathbb{R}$. Comme 1 est un majorant de A et 0 minore A, on a nécessairement $0\leqslant x_0\leqslant 1$, ie $x_0\in[0,1]$.

2. a. Par le I.1., on sait que $(\mathscr{P}(\mathrm{E}),\subset)$ est un ensemble ordonné complet. L'application ϕ est définie sur $\mathscr{P}(\mathrm{E})$ et à valeurs dans $\mathscr{P}(\mathrm{E})$. Montrons qu'elle est croissante pour l'inclusion. Soit X et Y deux parties de E telles que $\mathrm{X}\subset\mathrm{Y}$. On a $f(\mathrm{X})\subset f(\mathrm{Y})$ d'où $\mathrm{F}\setminus f(\mathrm{Y})\subset\mathrm{F}\setminus f(\mathrm{X})$, puis $g\big(\mathrm{F}\setminus f(\mathrm{Y})\big)\subset g\big(\mathrm{F}\setminus f(\mathrm{X})\big)$ et finalement $\mathrm{E}\setminus g\big(\mathrm{F}\setminus f(\mathrm{X})\big)\subset\mathrm{E}\setminus g\big(\mathrm{F}\setminus f(\mathrm{Y})\big)$. On déduit du théorème de Knaster-Tarski que ϕ admet un point fixe.

b. Soit X_0 un point fixe de ϕ (cf. III.3.a.). On a $\mathrm{E}\setminus g\big(\mathrm{F}\setminus f(\mathrm{X}_0)\big)=\mathrm{X}_0$ d'où $\mathrm{E}\setminus\mathrm{X}_0=g\big(\mathrm{F}\setminus f(\mathrm{X}_0)\big)$. Comme g est injective, on en déduit que g induit sur $\mathrm{F}\setminus f(\mathrm{X}_0)$ une bijection de $\mathrm{F}\setminus f(\mathrm{X}_0)$ sur $\mathrm{E}\setminus\mathrm{X}_0$ que nous noterons h. Soit $\theta:\mathrm{E}\to\mathrm{F}$ l'application définie par :

$$\forall x\in\mathrm{E},\ \theta(x):=\begin{cases} f(x) & \text{si } x\in\mathrm{X}_0\\ h^{-1}(x) & \text{sinon}\end{cases}$$

Démontrons que cette application est bijective.

▷ Soit x et x' dans E tels que $\theta(x)=\theta(x')$.

† Cas 1 : x et x' appartiennent à X_0. Alors $f(x)=f(x')$ donc $x=x'$ par injectivité de f.

† Cas 2 : x et x' appartiennent à $\mathrm{E}\setminus\mathrm{X}_0$. Alors $h^{-1}(x)=h^{-1}(x')$ donc $x=x'$ par injectivité de h^{-1}.

† Cas 3 : $x\in\mathrm{X}_0$ et $x'\notin\mathrm{X}_0$. Alors $f(x)=h^{-1}(x')$: absurde car $f(x)\in f(\mathrm{X}_0)$ et $h^{-1}(x')\in\mathrm{F}\setminus f(\mathrm{X}_0)$.

† Cas 4 : $x' \in X_0$ et $x \notin X_0$. De même ce cas de figure est absurde.

Ainsi $x = x'$ et θ est injective.

▹ Soit y dans F.

† Cas 1 : $y \in f(X_0)$. Il existe alors $x \in X_0$ tel que $y = f(x)$ d'où $y = \theta(x)$.

† Cas 2 : $y \notin f(X_0)$. On a alors $g(y) \in E \setminus X_0$ d'où $h^{-1}(g(y)) = y$. Ainsi $y = \theta(g(y))$.

On en déduit que θ est surjective.

Voir l'énoncé.