

Devoir Maison 07

Pour le lundi 24 Novembre 2025

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Exercice 1

On considère les matrices

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A tout nombre réel x on associe la matrice

$$M(x) = I + x.A + \frac{x^2}{2}.A^2 \tag{1}$$

1. Calculer A^2 et A^3 et en déduire, pour tout entier $n > 3$, la valeur de A^n .
2. Calculer en utilisant (1) le produit $M(x)M(y)$ et montrer que

$$M(x)M(y) = M(x+y) \tag{2}$$

3. Montrer que pour tout entier positif n : $(M(x))^n = M(nx)$. reconnaître $M(0)$.
4. Ecrire les matrice $M(x)$ et $(M(x))^n$ sous forme explicites.
5. Justifier l'inversibilité de la matrice $M(x)$ sans chercher à calculer son inverse.
6. Déterminer l'inverse de $M(x)$ en n'utilisant que la relation (2)
7. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Écrire sous forme explicites les matrices B^{-1} et B^n .
8. Retrouver la valeur de B^{-1} en utilisant la méthode du pivot.
9. Conclure quant à une structure algébrique de l'ensemble $\{M(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.