

Devoir Maison 6 - Eléments de Correction

Exercice 1

Partie I - Exponentielle d'une matrice carrée d'ordre 3.

Soient A et P les matrice définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrons que la matrice P est inversible en utilisant la méthode du pivot :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 - 2L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow 3L_2 - 5L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

La matrice triangulaire obtenue ne contient pas zéro sur la diagonale, P est donc inversible. Continuons le calcul de P^{-1}

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow 2L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow 2L_2 + L_3 \\ L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 4 & -6 & -10 \\ 0 & 10 & 10 \\ -2 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow 5L_1 - L_2 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 20 & -40 & -60 \\ 0 & 10 & 10 \\ -2 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1/20 \\ L_2 \leftarrow L_2/10 \\ L_3 \leftarrow L_3/2 \end{matrix} \boxed{\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = P^{-1}}$$

$$2. \text{ a.b. } P A P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = \boxed{T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = T}$$

$$\boxed{T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}, T^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3 \Rightarrow \boxed{\forall n \geq 3, T^n = T^3 T^{n-3} = O_3}$$

$$3. T = P A P^{-1} \Leftrightarrow P^{-1} T P = \overbrace{P^{-1} P}^I A P^{-1} P = A \Leftrightarrow \boxed{A = P^{-1} T P}$$

Par une récurrence rapide, si on suppose $A^n = P^{-1} T^n P$, alors $A^{n+1} = A^n \cdot A =$

$$P^{-1} T^n \overbrace{P P^{-1}}^I T P = P T^{n+1} P \text{ donc } \boxed{A^n = P^{-1} T^n P, \forall n \in \mathbb{N}^*}$$

$$\forall n \geq 3, T^n = O_3 \Rightarrow \forall n \geq 3, A^n = O_3$$

$$E(t) E(t') = \left(I + tA + \frac{t^2}{2} A^2 \right) \left(I + t'A + \frac{t'^2}{2} A^2 \right) \\ = I + t'A + \frac{t'^2}{2} A^2 + tA + tt' A^2 + \frac{t^2}{2} A^2$$

$$(a) \forall (t, t') \in \mathbb{R}^2,$$

$$= I + (t+t') A + \frac{\overbrace{t^2 + 2tt' + t'^2}^{(t+t')^2}}{2} A^2$$

en utilisant $A^3 = A^4 = O_3$

$$\Leftrightarrow \boxed{\forall (t, t') \in \mathbb{R}^2, E(t) E(t') = E(t+t')}$$

(b) Par a. : $E(t) E(-t) = E(t-t) = E(0) = I$. Donc la matrice $E(t)$ est inversible

$$\text{telle que } \boxed{(E(t))^{-1} = E(-t) = I - tA + \frac{t^2}{2} A^2}$$

(c) $[E(t)]^2 = E(t) E(t) = E(t+t) = E(2t)$. Montrons par récurrence que $[E(t)]^n = E(nt), \forall n \in \mathbb{N}$

On a évidemment la relation initialisée à $n=0$ ($E(0) = I = (E(t))^0$), $n=1, n=2$

Supposons qu'il existe un entier n tel que $[E(t)]^n = E(nt)$, alors $[E(t)]^{n+1} = [E(t)]^n E(t) = E(nt) E(t) = E(nt+t) = E((n+1)t)$, ce qui prouve l'hérédité de la relation et achève sa preuve en vertu du principe de récurrence.

$$\text{Donc } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}, [E(t)]^n = E(nt) = I + ntA + \frac{n^2 t^2}{2} A^2}$$

Exponentielle d'une matrice carrée d'ordre 2.

Soient B et D les matrices définies par :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. La méthode du pivot en 3 colonnes permet d'obtenir Q inversible et

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Un produit matriciel permet de vérifier le résultat.

3. D matrice diagonale $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

Or $Q^{-1}BQ = D \Leftrightarrow B = QDQ^{-1}$, ce qui entraîne par une récurrence rapide, $B^n = QD^nQ^{-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Relation encore vraie pour $n = 0$.

$$\text{Donc } B^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2^n \\ -1 & -2 \times 2^n \end{pmatrix} Q^{-1}$$

- 4.

$$B^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n \\ -1 & -2 \times 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2^n & 1 - 2^n \\ -2 + 2 \times 2^n & -1 + 2 \times 2^n \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } B^n = \begin{pmatrix} 2 - 2^n & 1 - 2^n \\ 2^{n+1} - 2 & 2^{n+1} - 1 \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}$$

5. Pour tout entier naturel n non nul, et pour tout réel t ,

$$E_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} B^k = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^n \frac{(2-2^k)}{k!} t^k & \sum_{k=0}^n \frac{(1-2^k)}{k!} t^k \\ \sum_{k=0}^n \frac{(2^{k+1}-2)}{k!} t^k & \sum_{k=0}^n \frac{(2^{k+1}-1)}{k!} t^k \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_n(t) & c_n(t) \\ b_n(t) & d_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \quad \boxed{a_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{2t^k - (2t)^k}{k!}}, \quad \boxed{b_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{2(2t)^k - 2t^k}{k!}}$$

$$\boxed{c_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k - (2t)^k}{k!}}, \quad \boxed{d_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{2(2t)^k - t^k}{k!}}$$

$$6. \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = e^x, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} = e^t, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(2t)^k}{k!} = e^{2t}.$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n(t) = 2e^t - e^{2t}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n(t) = 2e^{2t} - e^t, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n(t) = e^t - e^{2t}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} d_n(t) = 2e^{2t} - e^t$$

(a)

$$E(t) = \begin{pmatrix} \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n(t) & \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n(t) \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n(t) & \lim_{n \rightarrow +\infty} d_n(t) \end{pmatrix} \Leftrightarrow E(t) = \begin{pmatrix} 2e^t - e^{2t} & e^t - e^{2t} \\ 2e^{2t} - e^t & 2e^{2t} - e^t \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad E(t) = \begin{pmatrix} 2e^t & e^t \\ -2e^t & -e^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -e^{2t} & -e^{2t} \\ 2e^{2t} & 2e^{2t} \end{pmatrix} = e^t \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}}_{E_1} + e^{2t} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}}_{E_2}$$

$$(c) \quad E_1^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = E_1, \quad E_2^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = E_2, \quad E_1 E_2 = O_2, \quad E_2 E_1 = O_2$$

$$(d) \quad \text{Pour tout } t \text{ réel, } E(t) E(-t) = (e^t E_1 + e^{2t} E_2) (e^{-t} E_1 + e^{-2t} E_2) = E_1^2 + E_2^2 = I, \text{ donc } E(t) \text{ est inversible telle que } \boxed{(E(t))^{-1} = E(-t) = e^{-t} E_1 + e^{-2t} E_2}$$