# Devoir Maison 05

Pour le vendredi 10 Novembre 2023

> La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

**Exercice 1**

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est rapporté au repère orthonormal $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Soit A le point d'affixe $z_{\mathrm{A}} = \dfrac{\mathrm{i}}{2}$.

$\mathcal{T}$ est l'application qui, à tout point $M$, d'affixe $z$, distinct de A, associe le point $M'$ d'affixe $z'$ telle que

$$2zz' = \mathrm{i}(z + z').$$

1. On appelle I et J les points d'affixes respectives : $z_{\mathrm{I}} = 1,\ z_{\mathrm{J}} = \mathrm{i}$ . Soit K le milieu du segment [IJ].
   (a) Déterminer l'affixe $z_{\mathrm{K}}$ de K.
   (b) Déterminer les affixes des images des points I, J, K par l'application $\mathcal{T}$.
   (c) En déduire que $\mathcal{T}$ ne conserve pas les milieux.
2. Déterminer les points invariants par $\mathcal{T}$.
3. Montrer que $M' = \mathcal{T}(M)$ si et seulement si $\left(z' - \dfrac{\mathrm{i}}{2}\right)\left(z - \dfrac{\mathrm{i}}{2}\right) = -\dfrac{1}{4}$.
4. En déduire l'image par $\mathcal{T}$ du cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon 1.

**Exercice 2**

1. Déterminer deux réels $a$ et $b$ tels que $\forall t \in \mathbb{R}, \dfrac{t^2}{(1+t^2)(2+t^2)} = \dfrac{a}{1+t^2} + \dfrac{b}{2+t^2}$
2. Pour tout réel $x$ on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)(2+t^2)}\mathrm{d}t$
   (a) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -\operatorname{Arctan} x + \sqrt{2}\operatorname{Arctan} \frac{x}{\sqrt{2}}$
   (b) Déterminer la parité de $f$.
   (c) Calculer la limite de $f(x)$ quand $x$ tend vers $+\infty$.
   (d) Etudier les variations de $f$. Dresser le tableau de variations.
3. (a) Pour tout réel $u$ appartenant à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ on pose $g(u) = \displaystyle\int_0^u \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$.
   A l'aide du changement de variable $t = \tan x$ démontrer que :
   $\forall u \in ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[, g(u) = f(\tan u)$
   (b) En déduire le calcul de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \operatorname{Arctan}\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t$ (on effectuera le changement de variable $t = \sin x$)