

Devoir Maison 5 - Eléments de Correction

Exercice 1

1. (a) On a $z_K = \frac{1+i}{2}$.

(b) On a $2zz' = i(z+z') \Leftrightarrow 2zz' = iz + iz' \Leftrightarrow z'(2z-i) = iz \Leftrightarrow z' = \frac{iz}{2z-i}$, pour $z \neq \frac{i}{2}$.

Donc $z_{I'} = \frac{i}{2-i} = \frac{i(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{i(2+i)}{4+1} = \frac{-1+2i}{5}$.

$z_{J'} = \frac{ii}{2i-i} = \frac{-1}{i} = i = z_J$.

$z_{K'} = \frac{i\frac{1+i}{2}}{1+i-i} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

(c) K est le milieu de [IJ] et K' n'est pas le milieu de [I'J'] : $\mathcal{T}$ ne conserve pas les milieux.

2. On a $z' = z \Leftrightarrow 2zz = i(z+z) \Leftrightarrow 2z^2 = 2zi \Leftrightarrow$

$2z(z-i) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2z = 0 \\ z-i = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ z = i \end{cases}$

L'origine O et le point J sont les seuls points invariants par $\mathcal{T}$.

3. Pour $z \neq \frac{i}{2}$, $\left(z' - \frac{i}{2}\right)\left(z - \frac{i}{2}\right) + \frac{1}{4} = zz' - \frac{i}{2}(z+z') = \frac{1}{2}[2zz' - i(z+z')]$.

Mais par définition $2zz' - i(z+z') = 0$ si et seulement si z' est l'affixe de M' image par $\mathcal{T}$ du point M d'affixe z .

Donc $M' = \mathcal{T}(M) \Leftrightarrow \left(z' - \frac{i}{2}\right)\left(z - \frac{i}{2}\right) = -\frac{1}{4}$.

4. $M(z) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow AM = 1 \Leftrightarrow \left|z - \frac{i}{2}\right| = 1$.

D'après la question précédente en prenant le module de chaque membre d' l'égalité trouvée :

$\left|z - \frac{i}{2}\right| \times \left|z' - \frac{i}{2}\right| = \left|-\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4}$.

Donc pour un point M de $\mathcal{C}$, on a $1 \times \left|z' - \frac{i}{2}\right| = \frac{1}{4}$.

Cette égalité signifie que le point M' d'affixe z' appartient au cercle $\mathcal{C}'$ de centre A et de rayon $\frac{1}{4}$.

Exercice 2

1. Déterminons deux réels a et b tels que $\forall t \in \mathbb{R}, \frac{t^2}{(1+t^2)(2+t^2)} = \frac{a}{1+t^2} + \frac{b}{2+t^2}$.

Or on a :

$$\frac{a}{1+t^2} + \frac{b}{2+t^2} = \frac{2a+at^2+b+bt^2}{(1+t^2)(2+t^2)}$$

Les dénominateurs étant égaux, on peut identifier les coefficients des polynômes au numérateur : $2a+b=0$ et $a+b=1$ autrement dit $a=-1$ et $b=2$.

$$\forall t \in \mathbb{R}, \frac{t^2}{(1+t^2)(2+t^2)} = \frac{-1}{1+t^2} + \frac{2}{2+t^2}$$

2. Pour tout réel x on pose $f(x) = \int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)(2+t^2)} dt$.

La fonction intégrée étant définie et continue sur $\mathbb{R}$, f est définie sur $\mathbb{R}$.

(a) Démontrons que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -\text{Arctan } x + \sqrt{2} \text{Arctan } \frac{x}{\sqrt{2}}$

$$f(x) = \int_0^x \frac{-1}{1+t^2} + \frac{2}{2+t^2} dt = [-\text{Arctan}(t)]_0^x + \int_0^x \frac{1}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2} dt$$

$$f(x) = -\text{Arctan } x + \int_0^x \sqrt{2} \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2} dt = -\text{Arctan } x + \sqrt{2} \text{Arctan } \frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -\text{Arctan } x + \sqrt{2} \text{Arctan } \frac{x}{\sqrt{2}}$$

(b) Déterminons la parité de f .

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $-x \in \mathbb{R}$ et

$$f(-x) = -\text{Arctan}(-x) + \sqrt{2} \text{Arctan} \left(\frac{-x}{\sqrt{2}} \right) = \text{Arctan}(x) - \sqrt{2} \text{Arctan} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) = -f(x)$$

Donc f est impaire.

(c) Calculons la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2}$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2} + \sqrt{2} \frac{\pi}{2} = (\sqrt{2}-1) \frac{\pi}{2}$$

(d) Etudions les variations de f .

f est définie comme la primitive qui s'annule en 0 de $g : x \mapsto \frac{t^2}{(1+t^2)(2+t^2)}$ qui est de signe positif sur $\mathbb{R}$.

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = (\sqrt{2} - 1)\frac{\pi}{2}$ et par imparité, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = (1 - \sqrt{2})\frac{\pi}{2}$.

3. (a) Pour tout réel u appartenant à l'intervalle $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ on pose $g(u) =$

$$\int_0^u \frac{\sin^2 x}{1 + \cos^2 x} dx.$$

Posons le changement de variable $t = \tan x$:

— $\tan$ est $\mathcal{C}^1$ sur $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

— $\forall x \in] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$ donc $dt = (1 + t^2)dx$.

— $\tan(0) = 0$

On obtient pour tout u de $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$:

$$g(u) = \int_0^u \frac{\sin^2 x}{1 + \cos^2 x} dx$$

$$g(u) = \int_0^u \frac{\sin^2 x}{1 + 1 - \sin^2 x} dx$$

$$g(u) = \int_0^u \frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{2 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} dx$$

$$g(u) = \int_0^u \frac{\tan^2(x)}{2 - \tan^2(x)} dx$$

$$g(u) = \int_0^{\tan(u)} \frac{t^2}{2 - t^2} \frac{dt}{1 + t^2}$$

$$\forall u \in] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[, g(u) = f(\tan u)$$

(b) Calculons l'intégrale $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \text{Arctan} \sqrt{1 - t^2} dt$

Posons le changement de variable $t = \sin x$:

— $\sin$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0; \frac{\pi}{6}]$.

— $\forall x \in [0; \frac{\pi}{6}]$, $\sin'(x) = \cos(x)$.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \text{Arctan} \sqrt{1 - \sin^2(x)} \cos(x) dx$$

Or $\cos$ positif sur $[0; \frac{\pi}{6}]$ donc on obtient :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \text{Arctan}(\cos(x)) \cos(x) dx$$

Il reste à faire une intégration par parties avec pour fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $[0; \frac{\pi}{6}]$:

— $x \mapsto \text{Arctan}(\cos(x))$ à dériver.

— $x \mapsto \cos(x)$ à primitiver.

On obtient :

$$I = [\text{Arctan}(\cos(x)) \sin(x)]_0^{\frac{\pi}{6}} + g\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

Et le calcul se termine : on obtient une somme de 3 Arctan !