Devoir Maison 05 - Eléments de Correction

Exercice 1

1. $z_A = -2+2\mathrm{i}$; $z_{A'} = (1+\mathrm{i})\, z_A + 2 = -2$: $\boxed{z_{A'} = -2}$

$F(B) = A \Leftrightarrow (1+\mathrm{i})\, z_B + 2 = -2+2\mathrm{i} \Leftrightarrow z_B = \dfrac{-4+2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = -1+3\mathrm{i}$: $\boxed{z_B = -1+3\mathrm{i}}$

2. (a) Résolvons l'équation $z = (1+\mathrm{i})\, z + 2$ (1)

$(1) \Leftrightarrow \mathrm{i}z = -2 \Leftrightarrow z = \dfrac{-2}{\mathrm{i}} = 2\mathrm{i}$;

Il n'existe qu'un seul point invariant par F : le point $\boxed{\Omega\,(2\mathrm{i})}$; $\omega = 2\mathrm{i}$

(b) Pour $z \neq \omega$, $\dfrac{z'-z}{\omega - z} = \dfrac{(1+\mathrm{i})\, z + 2 - z}{2\mathrm{i} - z} = \dfrac{\mathrm{i}z+2}{2\mathrm{i}-z} = \dfrac{-\mathrm{i}\,(-z+2\mathrm{i})}{2\mathrm{i}-z} = -\mathrm{i}$

$$\boxed{\frac{z'-z}{\omega-z} = -\mathrm{i}}$$

Donc $\dfrac{MM'}{M\Omega} = \dfrac{|z'-z|}{|\omega - z|} = |-\mathrm{i}| = 1$: $\boxed{MM' = M\Omega}$

$(\operatorname{Vect} M\Omega\ ;\ \operatorname{Vect} MM') = \arg(-\mathrm{i})\,[\mathrm{mod}\ 2\pi] = -\dfrac{\pi}{2}\,[\mathrm{mod}\ 2\pi]$

$$\boxed{(\operatorname{Vect} M\Omega\ ;\ \operatorname{Vect} MM') = -\frac{\pi}{2}[\mathrm{mod}\ 2\pi]}$$

M' est l'intersection de la demi-droite perpendiculaire à $(M\Omega)$ passant par M, car $(\operatorname{Vect} M\Omega\,;\ \operatorname{Vect} MM') = -\dfrac{\pi}{2}[\mathrm{mod}\ 2\pi]$, et du cercle de centre M passant par Ω, car $MM' = M\Omega$.

3. (a) $|z+2-2\mathrm{i}| = \sqrt{2} \Leftrightarrow AM = \sqrt{2}$:

$\boxed{\Gamma \text{ est le cercle de centre } A \text{ et de rayon } \sqrt{2}.}$

On a $AB = |z_B - z_A| = |-1+3\mathrm{i}+2-2\mathrm{i}| = |1+\mathrm{i}| = \sqrt{2}$: $\boxed{B \in \Gamma}$

(b) On a $z'+2 = (1+\mathrm{i})\, z + 4 = (1+\mathrm{i})\, z + 4$

et $(1+\mathrm{i})\,(z+2-2\mathrm{i}) = z+2-2\mathrm{i}+\mathrm{i}z+2\mathrm{i}+2 = z+4+\mathrm{i}z$.

Donc $\boxed{z'+2 = (1+\mathrm{i})\,(z+2-2\mathrm{i})}$

Soit $M \in \Gamma$, alors :

$AM = \sqrt{2} \Leftrightarrow |z+2-2\mathrm{i}| = \sqrt{2}$
$\Leftrightarrow |z'+2| = |1+i|\,\sqrt{2}$
$\Leftrightarrow |z'+2| = 2 \Leftrightarrow A'M' = 2.$

Donc l'image par F de tout point de Γ appartient au cercle Γ' de centre A' et de rayon 2.

Exercice 2

1. En effectuant la différence entre les équations (1) et (2) il vient : $\boxed{my'' + ky = kx}$

2. Avec les conditions données l'équation s'écrit : $y'' + \omega_0^2 y = \omega_0^2 a \sin(\omega t)$ car $m \neq 0$

- Résolution de l'équation homogène (EH) associée : $y'' + \omega_0^2 y = 0$:

  On pose l'équation caractéristique : $r^2 + \omega_0^2 = 0$; elle admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = -i\omega_0$ et $r_2 = i\omega_0$

  Les solutions de (EH) sont donc les fonctions de la forme $y(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$ avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$

- On cherche une solution particulière sous la forme $y_P(t) = \alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t$

  $y'_P(t) = -\alpha\omega\sin\omega t + \beta\omega\cos\omega t$ et $y''_P(t) = -\alpha\omega^2\cos\omega t - \beta\omega^2\sin\omega t$

  On reporte dans (E) : $y''_P(t) + \omega_0^2 y_P() = \omega_0^2 a\sin\omega t \Leftrightarrow \alpha(-\omega^2+\omega_0^2)\cos\omega t + b(-\omega^2+\omega_0^2)\sin\omega t = \omega_0^2 a\sin\omega t$

  Par identification il vient $\alpha = 0$ et$\beta = a\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2-\omega^2}$

- La soltion générale de (E) est donnée par :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ y : t \mapsto A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + a\tfrac{\omega_0^2}{\omega_0^2-\omega^2}\sin(\omega t), \quad (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$$

3. (a) $y(0) = 0$ donne $A = 0$

$y'(0) = 0 \Leftrightarrow B\omega_0 + \frac{a\omega\omega_0^2}{\omega_0^2-\omega^2} = 0 \Leftrightarrow B = -\frac{2a}{3}$ car $\omega_0 = 2\omega$

Conclusion : $\boxed{y(t) = \frac{4a}{3}\left(-\frac{1}{2}\sin(2\omega t) + \sin(\omega t)\right)}$

(b) $y(t) = \frac{4a}{3}\left(-\frac{1}{2}2\sin(\omega t)\cos(\omega t) + \sin(\omega t)\right) = \frac{4a}{3}\sin(\omega t)\left(-\cos(\omega t) + 1\right)$

d'après la formule $1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$ il vient $\boxed{y(t) = \frac{8a}{3}\sin(\omega t)\sin^2(\frac{\omega t}{2})}$

(c) La période est $T = \frac{2\pi}{\omega}$ car $\forall t \in \mathbb{R}, y(t+T) = \frac{8a}{3}\sin(\omega(t+\frac{2\pi}{\omega})\sin^2(\frac{\omega(t+\frac{2\pi}{\omega})}{2}) = y(t)$ car

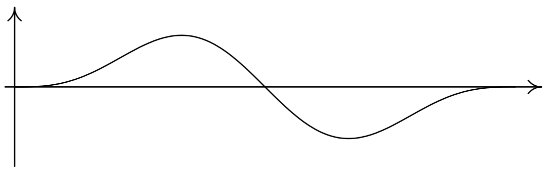
$\sin(\omega(t+\frac{2\pi}{\omega}) = \sin(\omega t + 2\pi) = \sin(\omega t)$ et

$\sin^2(\frac{\omega(t+\frac{2\pi}{\omega})}{2}) = \sin^2(\frac{\omega t}{2}+\pi) = (-\sin(\frac{\omega t}{2}))^2 = \sin^2(\frac{\omega t}{2})$

$$\begin{aligned}
\forall t \in [0;T], y'(t) &= \frac{8a\omega}{3}\left(\omega\cos(\omega t)\sin^2(\frac{\omega t}{2}) + \sin(\omega t t)2\sin(\frac{\omega t}{2})\frac{\omega}{2}\cos(\frac{\omega t}{2}\right)\\
&= \frac{8a\omega}{3}\sin\frac{\omega t}{2}\left(\cos(\omega t)\sin\frac{\omega t}{2} + \sin(\omega t)\cos\frac{\omega t}{2}\right)\\
&= \frac{8a\omega}{3}\sin\frac{\omega t}{2}\sin\left(\omega + \frac{\omega}{2}\right)t
\end{aligned}$$

Par ailleurs , $\forall t \in [0; \frac{2\pi}{\omega}], 0 \leq \frac{\omega t}{2} \leq \pi \Rightarrow \sin\frac{\omega t}{2} \geq 0$
$\forall t \in [0; \frac{2\pi}{\omega}], 0 \leq \omega + \frac{\omega}{2} \leq 3\pi$ ainsi
$\sin\left(\omega + \frac{\omega}{2}\right)t \geq 0 \Leftrightarrow t \in [0; \frac{T}{3}] \cup [\frac{2T}{3}; T]$
Conclusion :

t	0		$\frac{T}{3}$		$\frac{2T}{3}$		T
$y'(t)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
$y(t)$	0	$\nearrow$	$a\sqrt{3}$	$\searrow$	$b{-}a\sqrt{3}$	$\nearrow$	0



4. (a) Avec les nouvelles conditions on trouve $A = 0$ et $B = \frac{a\omega_0^2}{\omega_0^2-\omega^2}$

donc $\boxed{y(t) = \frac{a\omega_0^2}{\omega_0^2-\omega^2}\left(\sin(\omega_0 t) + \sin(\omega t)\right)}$

(b) D'après la formule $\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$ il vient : $y(t) = \frac{a(\omega+\varepsilon)^2}{(\omega_0-\omega)(\omega_0+\omega)}\left(2\sin\frac{(\omega_0+\omega)t}{2}\cos\frac{(\omega_0-\omega)t}{2}\right) = \frac{2a(\omega+\varepsilon)^2}{(\varepsilon)(\omega_0+\omega)}\left(\sin\frac{(\omega_0+\omega)t}{2}\cos\frac{(\omega_0-\omega)t}{2}\right)$

Or si ε est faible on a $\frac{2a(\omega+\varepsilon)^2}{(\varepsilon)(\omega_0+\omega)} \approx \frac{a\omega}{\varepsilon}$ et $\frac{\omega+\omega_0}{2} \approx \omega$ donc y est proche de la fonction h.