Devoir Maison 05

Pour le vendredi 03 Novembre 2025

Devoir de vacances optionnel

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Exercice 1

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On prendra 2 cm pour unité graphique.

On considère l'application F du plan dans lui même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = (1+\mathrm{i})z + 2.$$

1. Soit A le point d'affixe $-2+2\mathrm{i}$.

   Déterminer les affixes des points A′ et B vérifiant respectivement $\mathrm{A}' = F(\mathrm{A})$ et $F(\mathrm{B}) = \mathrm{A}$.

2. Méthode de construction de l'image de M.
   (a) Montrer qu'il existe un point confondu avec son image. On notera Ω ce point et ω son affixe.
   (b) Ã ?tablir que pour tout complexe z distinct de ω, $\dfrac{z'-z}{\omega - z} = -\mathrm{i}$.

   Soit M un point distinct de Ω.

   Comparer MM' et $M\Omega$ et déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MM'})$. En déduire une méthode de construction de M' à partir de M.

3. Ã ?tude de l'image d'un ensemble de points.
   (a) Donner la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble Γ, des points du plan dont l'affixe z vérifie $|z+2-2\mathrm{i}| = \sqrt{2}$.

   Vérifier que B est un point de Γ.

   (b) Démontrer que, pour tout z élément de $\mathbb{C}$

$$z' + 2 = (1+\mathrm{i})(z+2-2\mathrm{i}).$$

   Démontrer que l'image par F de tout point de Γ appartient au cercle Γ‘ de centre A′ et de rayon 2.

   Placer O, A, B, A′, Γ et Γ' sur une même figure.

Exercice 2

On considère un ressort de raideur k suspendu par son extrémité A et tendu par le poids d'une masse m. A est mobile verticalement. On désigne par x sa distance à la position de référence O et par y la distance de m à sa position d'équilibre lorsque A est immobile en O.

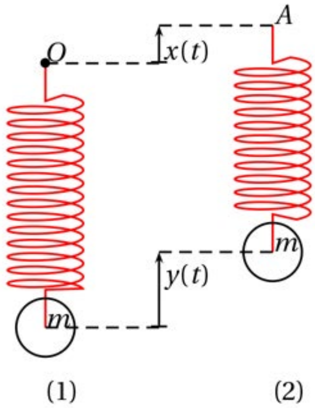
Les lois de la mécanique donnent dans la position d'équilibre la relation :

$$(1) \quad -mg + k(l - l_0) = 0$$

où l_0 est la longueur du ressort à vide et l sa longueur dans la position à l'équilibre.

Dans la position (2) on a :

$$(2) \quad -mg + k(l + x - y - l_0) = my''$$



1. Vérifier que l'équation différentielle en y connaissant la loi de $x(t)$ est $my'' + ky = kx$.
2. On pose $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ et on donne $x(t) = a \sin \omega t$. Déterminer la solution générale $y(t)$.
3. (a) En supposant qu'à l'instant $t = 0$ $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$, déterminer $y(t)$ pour $\omega_0 = 2\omega$.
   (b) Vérifier qu'on peut écrire $y(t) = \frac{8a}{3} \sin(\omega t) \sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)$
   (c) Etudier les variations de la fonction y sur une période et déterminer les extremas.
4. (a) On suppose ici qu'à l'instant $t = 0$ $y(0) = 0$ et $y'(0) = a\frac{\omega_0^2}{\omega_0 - \omega}$, déterminer $y(t)$.
   (b) Complément : on pose $\omega_0 = \omega + \varepsilon$ avec ε voisin de 0.
      i. Vérifier qu'on peut écrire : $y(t) = \frac{2a(\omega+\varepsilon)^2}{\varepsilon(\omega_0+\omega)} \sin\left(\frac{(\omega+\omega_0)t}{2}\right) \cos\left(\frac{\varepsilon t}{2}\right)$
      ii. Comme ω est proche de ω_0 on a alors y est proche de la fonction h définie par $h(t) = \frac{a\omega}{\varepsilon} \cos\left(\frac{\varepsilon t}{2}\right) \sin(\omega t)$. On pose $Y_0(t) = \frac{a\omega}{\varepsilon} \cos\left(\frac{\varepsilon t}{2}\right)$. Représenter sans étude les courbes de h et de Y_0 dans un même repère pour $t \in [0; \frac{\pi}{\varepsilon}]$.