Devoir Maison 04

Pour le lundi 6 Novembre 2023

> La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Exercice 1

On se propose de résoudre l'équation différentielle $(E) : x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$ en utilisant deux méthodes différentes. Il est donc nécessaire de traiter les questions **2** et **3 indépendamment**.

1. L'équation (E) est-elle résoluble ? Quelles limitations ceci introduit-il ?
   Pour la suite de cet exercice, nous nous limiterons à $x \in I =]0, +\infty[$
2. Transformer (E) en utilisant le changement de fonction inconnue $z(x) = x^2\, y(x)$.
   Former l'équation (E_1) dont la fonction z est solution, puis la résoudre.
   En déduire les solutions de (E) sur I.
3. Cette fois, on transforme (E) en utilisant le changement de variable $x = e^t$. Quelle est la nouvelle équation (E_2) obtenue ? Résoudre cette équation et en déduire les solutions de (E) sur I. Comparer avec le résultat de la question précédente.

Exercice 2

Première partie

On considère l'équation différentielle (E) suivante définie sur l'intervalle $I =]0; \frac{1}{2}[$

$$xy' + y = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$$

1. Résoudre l'équation homogène associée.
2. Déterminer une solution particulière de (E) à l'aide de la méthode de la variation de la constante.
3. En déduire les solutions de (E) sur I.
4. Déterminer la solution g vérifiant $g(\frac{1}{4}) = \frac{2\pi}{3}$

Deuxième partie

On considère la fonction f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \frac{\text{Arcsin}(2x)}{x}$$

5. Justifier que f est définie sur $D = [-\frac{1}{2}; 0[\cup]0 : \frac{1}{2}]$.
6. Etudier la parité de f.
7. En utilisant la notion de taux d'accroissement, déterminer la limite de f quand x tend vers 0.
8. Indiquer pour quelles valeurs de x ,f est continue, puis dérivable et calculer pour ces valeurs la dérivée f' de f.
9. Justifier que f' est du signe de la fonction h définie par $h(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{1-4x^2}} - \text{Arcsin}(2x)$

10. Etudier les variations de h sur l'intervalle $]0; \frac{1}{2}[$. En déduire le signe de h.
11. Dresser le tableau de f.
12. Démontrer que f réalise une bijection de $]0; \frac{1}{2}[$ sur un intervalle J qu'on précisera. En déduire qu'elle admet une fonction réciproque notée f^{-1}.
13. Résoudre l'équation $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}$