Devoir Maison 4 - Eléments de Correction

Exercice 1

1. Sous forme résolue, l'équation devient $y'' = -\dfrac{4}{x}y' - \dfrac{2}{x^2}y$.

   Ceci est possible $\boxed{\text{sur tout intervalle ne contenant pas } 0}$

2. Sur I, x ne s'annule pas. On pose $y = \dfrac{z}{x^2}$, soit $z = y\,x^2$ qui se dérive en $z' = y'\,x^2 + 2xy$, puis $z'' = y''\,x^2 + 4xy' + 2y$. L'équation (E) devient immédiatement $\boxed{z'' = 0}$

   D'où $z' = A$ puis $z = Ax + B$. Finalement, avec $y = \dfrac{z}{x^2}$, il vient $\boxed{y = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2}}$

3. Cette fois, nous effectuons le changement de variable $t = \ln(x)$ (valable sur I)
   $y(x) = y(e^t) = \phi(t)$ donc $\phi'(t) = e^t y'(e^t)$ et $\phi''(t) = e^{2t}y''(e^t) + e^t y'(e^t)$
   (E) s'écrit $e^{2t}y''(e^t)+4e^t y'(e^t)+2y(e^t) = 0$ soit encore $\boxed{(E_2) : \phi'' + 3\phi' + 2\phi = 0}$

   C'est une équation linéaire homogène du second ordre à coefficients constants. L'équation caractéristique $\alpha^2+3\alpha+2 = 0$ admet deux racines distinctes $\alpha = -2$ et $\alpha = -1$, d'où les solutions de (E_2) : $\phi = A\,e^{-t}+B\,e^{-2\,t}$. On retrouve $\boxed{y = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2}}$

Exercice 2
Première partie

On considère l'équation différentielle (E) suivante définie sur l'intervalle $I =]0; \frac{1}{2}[$: $xy' + y = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$

1. Equation homogène : (EH) : $y' + \frac{1}{x}y = 0$
   Soit la fonction a définie sur I par $a(x) = \frac{1}{x}$. Elle est continue sur I donc admet des primitives sur I. Soit A une primitive de a sur I.
   $\forall x \in I, A(x) \ln|x| = \ln x$ car $x > 0$ alors $e^{-A(x)} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$
   Conclusion : $\boxed{\mathcal{S}_{EH} = \{f_k : x \mapsto \frac{k}{x}, \quad k \in \mathbb{R}\}}$
2. On pose $y_0(x) = \frac{k(x)}{x}$ où k est une fonction dérivable sur I. Alors $\forall x \in I, y_0'(x) = \frac{k'(x)x-k(x)}{x^2}$ et on reporte dans (E) : $x\frac{k'(x)x-k(x)}{x^2} + \frac{k(x)}{x} = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} \Leftrightarrow k'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$ d'où $k(x) = \text{Arcsin}(2x)$
   Une solution particulière de (E) est donc la fonction y_0 définie par : $\boxed{\forall x \in I, y_0(x) = \frac{\text{Arcsin}(2x)}{x}}$
3. Les solutions de (E) sur I sont obtenues en faisant la somme de la solution de l'équation homogène et d'une solution particulière.
   Conclusion : $\boxed{\mathcal{S}_E = \{f_k : x \mapsto \frac{k}{x} + \frac{\text{Arcsin}(2x)}{x}, \quad k \in \mathbb{R}\}}$
4. $g(\frac{1}{4}) = \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow 4k + 4\,\text{Arcsin}(\frac{1}{2}) = \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow 4k + 4\frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow k = 0$
   g est donc la fonction définie par : $\boxed{\forall x \in I, \quad g(x) = \frac{\text{Arcsin}(2x)}{x}}$

Deuxième partie

On considère la fonction f de la variable réelle x définie par : $f(x) = \frac{\text{Arcsin}(2x)}{x}$

5. La fonction Arcsin est définie sur $[-1; 1]$ or $2x \in [-1; 1] \Leftrightarrow x \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ ainsi la fonction $x \mapsto \text{Arcsin}(2x)$ est définie sur $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$.
   Par ailleurs la fonction inverse est définie sur $\mathbb{R}^*$ alors : $\underline{f \text{ est définie sur } D = [-\frac{1}{2}; 0[\cup]0; \frac{1}{2}]}$.
6. $\forall x \in D, -x \in D$ et $f(-x) = \frac{\text{Arcsin}(-2x)}{-x} = \frac{-\text{Arcsin}(2x}{-x}$ car la fonction Arcsin est impaire.
   Ainsi $\forall x \in D, f(-x) = f(x)$ donc $\underline{f \text{ est paire}}$.
7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{arcsin(2x) - \text{Arcsin}(2 \times 0)}{x - 0} = 2 \times arcsin'(0)$ d'où $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2}$

8. f est continue sur D en tant que quotient de fonctions continues sur D avec un dénominateur ne s'annulant pas sur D.

   La fonction Arcsin est dérivable sur $]-1;1[$ alors la fonction $x \mapsto \mathrm{Arcsin}(2x)$ est dérivable sur $]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}[$ et par suite f est dérivable sur $]-\frac{1}{2};0[\cup]0;\frac{1}{2}[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $]-\frac{1}{2};0[\cup]0;\frac{1}{2}[$ avec un dénominateur ne s'annulant pas sur $]-\frac{1}{2};0[\cup]0;\frac{1}{2}[$.

9. $\forall x \in, \quad]-\frac{1}{2};0[\cup]0;\frac{1}{2}[f'(x) = \frac{\frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}} - \mathrm{Arcsin}(2x)}{x^2} = \frac{h(x)}{x^2}$

   or $\forall x \in, \quad]-\frac{1}{2};0[\cup]0;\frac{1}{2}[, x^2 > 0$ donc f' est du signe de la fonction h définie par $\boxed{h(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{1-4x^2}} - \mathrm{Arcsin}(2x)}$

10. h est dérivable sur $]-\frac{1}{2};0[\cup]0;\frac{1}{2}[$ en tant que quotient de fonctions continues sur $]-\frac{1}{2};0[\cup]0;\frac{1}{2}[$ avec un dénominateur ne s'annulant pas sur $]-\frac{1}{2};0[\cup]0;\frac{1}{2}[$, donc h est dérivable sur $]0;\frac{1}{2}[$.

    $\forall x \in]0;\frac{1}{2}[, \quad h'(x) = \frac{2\sqrt{1-4x^2} - \frac{-8x.2x}{2\sqrt{1-4x^2}}}{1-4x^2} - \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} = \frac{8x^2}{(1-4x^2)\sqrt{1-4x^2}}$

    Ainsi $\forall x \in]0;\frac{1}{2}[, h'(x) > 0$ donc h est strictement croissante sur $]0;\frac{1}{2}[$

    Par ailleurs $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0$ alors on en déduit que $\forall x \in]0;\frac{1}{2}[, h(x) > 0$

11. D'après l'étude précédente, $\forall x \in]0;\frac{1}{2}[, f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]0;\frac{1}{2}[$. De plus f est paire donc f est strictement décroissante sur $]-\frac{1}{2};0[$. D'où le tableau de variations :

x	$-\frac{1}{2}$			0			$\frac{1}{2}$
$f'(x)$	$\|$	$-$		$\|$		$+$	$\|$
$f(x)$	π	$\searrow$	2	$\|$	2	$\nearrow$	π

12. f est continue et strictement croissante sur $]0;\frac{1}{2}[$ donc f réalise une bijection de $]0;\frac{1}{2}[$ sur un $\boxed{J =]2;\pi[}$. Elle admet donc une fonction réciproque notée f^{-1} définie sur J.

13. $\frac{1}{4} \in]0;\frac{1}{2}[$ donc l'équation $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}$ admet une unique solution $x = f(\frac{1}{4}) = 4\,\mathrm{Arcsin}\,\frac{1}{2} = \frac{2\pi}{3}$

    Conclusion : $\boxed{\mathcal{S} = \{\frac{2\pi}{3}\}}$