Devoir Maison 04 - Eléments de Correction

Exercice 1

1. Soit l'équation différentielle : $y' - \frac{1}{n}y = -\frac{x+1}{n(n+1)}$ (E)
   — Résolution de l'équation homogène :
   on pose pour tout x réel $a(x) = -\frac{1}{n}$: a est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$. Une primitive est la fonction A définie par $\forall x \in \mathbb{R}, A(x) = -\frac{x}{n}$
   Les solution de l'équation homogène sont donc les fonctions de la forme $y(x) = ke^{\frac{x}{n}}$ $\quad k \in \mathbb{R}$
   — On recherche une solution particulière de la forme $g(x) = ax + b, (a, b) \in \mathbb{R}^2$
   $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = a$ alors en reportant dans (E) il vient :
   $$a - \frac{1}{n}(ax+b) = -\frac{x+1}{n(n+1)} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{n}a = -\frac{1}{n(n+1)} \\ a - \frac{b}{n} = -\frac{1}{n(n+1)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{n+1} \\ b = 1 \end{cases}$$
   Une solution particulière est donc la fonction g définie par $g(x) = 1 + \frac{x}{n+1}$
   — Conclusion : $\boxed{\mathcal{S}_{(E)} = \left\{ f_k : x \mapsto 1 + \frac{x}{n+1} + e^{\frac{x}{n}}, k \in \mathbb{R} \right\}}$
2. $f(0) = 0 \Leftrightarrow k + 1 = 0 \Leftrightarrow k = -1$.
   La solution f de (E) telle que $f(0) = 0$ est définie par $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 + \frac{x}{n+1} - e^{\frac{x}{n}}}$

Exercice 2

$$Z = \frac{(1-\mathrm{i})(z-\mathrm{i})}{z-1}.$$

1. (a) $Z_{\mathrm{C}'} = \dfrac{(1-\mathrm{i})(-\mathrm{i}-\mathrm{i})}{-\mathrm{i}-1} = \dfrac{-2\mathrm{i}(1-\mathrm{i})}{-\mathrm{i}-1} = \dfrac{2\mathrm{i}(1-\mathrm{i})}{\mathrm{i}+1} = \dfrac{2\mathrm{i}(1-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(\mathrm{i}+1)(1-\mathrm{i})} = \dfrac{2\mathrm{i}(1-1-2\mathrm{i}}{1+1} = -\mathrm{i}$.
   Le point C est donc invariant
   (b) Placer les points A, B et C.
2. (a) Avec $z = x + \mathrm{i}y$,
   $$Z = \frac{(1-\mathrm{i})(x+\mathrm{i}y-\mathrm{i})}{x+\mathrm{i}y-1} = \frac{(1-\mathrm{i})(x+\mathrm{i}(y-1))}{x-1+\mathrm{i}y}$$
   $$Z = \frac{(1-\mathrm{i})(x+\mathrm{i}(y-1))(x-1-\mathrm{i}y)}{(x-1+\mathrm{i}y)(x-1-\mathrm{i}y)} = \frac{(1-\mathrm{i})[x^2-x+y^2-y+\mathrm{i}(xy-y-x+1-xy}{(x-1)^2+y^2}$$
   $$Z = \frac{x^2+y^2-x-y-x+1+\mathrm{i}(-y-x+1-x^2+x-y^2+y)}{(x-1)^2+y^2} =$$
   $$Z = \frac{x^2-2x+1+y^2-2y+\mathrm{i}(-x^2-y^2+1}{(x-1)^2+y^2} =$$
   $$Z = \frac{(x-1)^2+(y-1)^2-1-\mathrm{i}\left(x^2+y^2-1\right)}{(x-1)^2+y^2}.$$
   (b) La partie imaginaire est nulle soit $x^2 + y^2 - 1 = 0$ ou $x^2 + y^2 = 1$ qui est une équation du cercle centré en O de rayon 1. C'est l'ensemble E.
   (c) La partie réelle est négative ou nulle si $(x-1)^2 + (y-1)^2 - 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow$
   $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leqslant 1$.
   F est l'ensemble des points situés à l'intérieur ou sur le cercle centré en $(1\,;\,1)$ et de rayon 1.
3. (a) $|1-\mathrm{i}|^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \Rightarrow |1-\mathrm{i}| = \sqrt{2}$.
   On peut donc écrire $1 - \mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos -\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin -\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.
   (b) $\dfrac{(1-\mathrm{i})(z-\mathrm{i})}{z-1} \in \mathbb{R}*$ si et seulement si $\arg\left(\dfrac{(1-\mathrm{i})(z-\mathrm{i})}{z-1}\right) = k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
   Or
   $$\arg\left(\frac{(1-\mathrm{i})(z-\mathrm{i})}{z-1}\right) = \arg(1-\mathrm{i}) + \arg\left(\frac{z-\mathrm{i}}{z-1}\right).$$
   Mais $\arg\left(\dfrac{z-\mathrm{i}}{z-1}\right) = \left(\overrightarrow{M\mathrm{A}},\ \overrightarrow{M\mathrm{B}}\right)$, donc
   $\dfrac{(1-\mathrm{i})(z-\mathrm{i})}{z-1} \in \mathbb{R}*$ si et seulement si $-\dfrac{\pi}{4} + \left(\overrightarrow{M\mathrm{A}},\ \overrightarrow{M\mathrm{B}}\right) = k\pi \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{M\mathrm{A}},\ \overrightarrow{M\mathrm{B}}\right) = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$.
   (c) D'après la question précédente l'ensemble des points M vérifiant $\left(\overrightarrow{M\mathrm{A}},\ \overrightarrow{M\mathrm{B}}\right) = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$ est l'ensemble des points M distincts de A et de B tel que Z soit un réel non nul. D'après la question 2. b. cet ensemble est le cercle de centre O de rayon 1 privé de A et de B.
   (d) En reprenant le résultat précédent, l'ensemble des points M est l'ensemble des points tels que $\arg Z = 2k\pi$ c'est-à-dire tels que Z est un réel supérieur à zéro. Il faut donc que la partie réelle de Z soit strictement positive :
   $$\begin{cases} x^2 + y^2 & = & 1 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 & > & 1 \end{cases}$$
   L'ensemble cherché est donc l'arc de cercle du cercle unitaire intersection avec le cercle centré en $(1\,;\,1)$ de rayon 1, les points A et B étant exclus. Voir la figure.
   On reconnaît le théorème de l'angle inscrit dont la mesure est égale à la moitié de celle de l'angle au centre qui est ici droit.