

Devoir Maison 04

Pour le lundi 13 Octobre 2025

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Exercice 1

n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Résoudre l'équation différentielle :

$$y' - \frac{1}{n}y = -\frac{x+1}{n(n+1)} \quad (E)$$

2. Déterminer la solution, f , vérifiant $f(0) = 0$.

Exercice 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 4 cm. On note A et B les points d'affixes respectives 1 et i . Atout point M , distinct de A et d'afixe z , est associé le point M' d'afixe Z définie par :

$$Z = \frac{(1-i)(z-i)}{z-1}.$$

1. (a) Calculer l'afixe du point C' associé au point C d'afixe $-i$.
(b) Placer les points A, B et C.
2. Soit $z = x + iy$ où x et y désignent deux nombres réels.
(a) Montrer l'égalité :

$$Z = \frac{(x-1)^2 + (y-1)^2 - 1}{(x-1)^2 + y^2} - i \frac{x^2 + y^2 - 1}{(x-1)^2 + y^2}.$$

- (b) Déterminer l'ensemble E des points M d'afixe z telle que Z soit réel.
(c) Déterminer l'ensemble F des points M d'afixe z telle que $\text{Re}(Z)$ soit négatif ou nul.
3. (a) Ecrire le nombre complexe $(1-i)$ sous forme trigonométrique.
(b) Soit M un point d'afixe z , distinct de A et de B. Montrer que :

$$\frac{(1-i)(z-i)}{z-1} \in \mathbb{R}^* \text{ si et seulement s'il existe un entier } k \text{ tel que}$$

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

- (c) En déduire l'ensemble des points M vérifiant $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{4} + k\pi$.
- (d) Déterminer l'ensemble des points M vérifiant $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$.