Devoir Maison 03

Pour le lundi 16 Octobre 2023

> La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Exercice 1

Soit l'application $f : E \to F$, et A un sous-ensemble de E.

1. Montrer que, si f est injective, alors $f\left(\complement_E A\right) \subset \complement_F f(A)$.
2. Utiliser un croquis simple pour montrer que l'injection est nécessaire.

Exercice 2

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. (Unités graphiques : 2 cm).

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (3 + x)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}.$$

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$, puis en $+\infty$.
2. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations.
3. Construire la courbe (Γ) représentative de f dans $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
4. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\mathrm{I} = \displaystyle\int_{-3}^{0} x\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x$ et en déduire l'aire, en unités d'aire, du domaine défini par les couples $(x,\ y)$ tels que
$0 \leqslant y \leqslant f(x)$ et $x \leqslant 0$.
5. (a) Démontrer que l'équation $f(x) = 3$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$. Soit α la solution non nulle, montrer que : $-2 < \alpha < -\dfrac{3}{2}$.
   (b) Plus généralement, déterminer **graphiquement** suivant les valeurs du nombre réel m, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

Partie B

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = 3\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 3$.

1. Démontrer que $f(x) = 3$ si et seulement si $\varphi(x) = x$
2. Soit φ' et $\varphi''(x)$ les dérivées première et seconde de la fonction φ.
   (a) Calculer, pour tout réel x, $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$. Justifier que $\varphi'(\alpha) = \dfrac{\alpha + 3}{2}$.
   (b) Etudier le sens de variation de φ', puis celui de φ.
   On se place désormais dans l'intervalle $\mathrm{I} = [-2\ ;\ \alpha]$.
3. Montrer que, pour tout x appartenant à I ;
   (a) $\varphi(x)$ appartient à I.

(b) $\dfrac{1}{2} \leqslant \varphi'(x) \leqslant \dfrac{3}{4}$

(c) En déduire, à l'aide d'une intégration, que pour tout x de l'intervalle I, on a :

$$0 \leqslant \frac{1}{2}(\alpha - x) \leqslant \varphi(\alpha) - \varphi(x) \leqslant \frac{3}{4}(\alpha - x).$$

4. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u_0 & = & -2 \\ u_{n+1} & = & \varphi\left(u_n\right) \end{array} \right.$$

(a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier n, u_n appartient à l'intervalle I.

(b) Justifier que, pour tout entier n,

$$0 \leqslant \alpha - u_{n+1} \leqslant \frac{3}{4}\left(\alpha - u_n\right) \qquad \text{puis que} \qquad 0 \leqslant \alpha - u_n \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

(c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.

(d) Déterminer le plus petit entier p tel que : $\left(\dfrac{3}{4}\right)^p \leqslant 10^{-2}$.

Donner une approximation décimale à 10^{-2} près de u_p, à l'aide d'une calculatrice, puis une valeur approchée de α à 2×10^{-2} près.