Devoir Maison 03 - Eléments de Correction

Exercice 1

1. Montrons l'inclusion $f\left(\complement_E A\right) \subset \complement_F f(A)$:

$$\forall\, y \quad y \in f\left(\complement_E A\right) \Rightarrow \exists\, x \in E - A \quad f(x) = y$$

Il reste à montrer que $y \notin f(A)$. Procédons par l'absurde :

— Si $y \in f(A)$, alors $\exists\, x_1 \in A \quad f(x_1) = y$.
— Mais alors $f(x) = f(x_1) \Rightarrow x = x_1$ (f est injective)
— d'où $x \in A$ qui contredit $x \in E - A$.

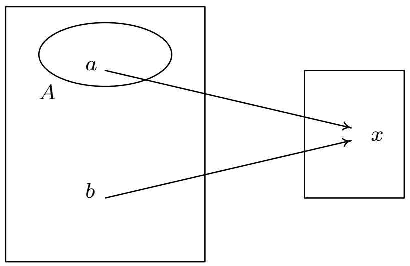
2. Le contre-exemple doit nécessairement utiliser une application non injective :

Avec $A = \{a\}$, nous avons :

$$f\left(\complement_E A\right) = f\left(\{b\}\right) = \{x\}$$

et

$$\complement_F f(A) = \complement_F \{x\} = \varnothing$$



L'inclusion $\underbrace{f\left(\complement_E A\right)}_{\{x\}} \subset \underbrace{\complement_F f(A)}_{\varnothing}$ n'est plus vérifiée (mais f n'est pas injective)

Exercice 2

Partie A

$$f(x) = (3+x)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}.$$

1. • En plus l'infini : $f(x) = 3\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + x\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$.

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} = 0$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} = 0$, donc par somme de limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Donc l'axe des abscisses est asymptote horizontale à la représentation graphique de f.

• En moins l'infini : on a :
$\lim\limits_{x\to-\infty} (3+x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} = +\infty$, donc par produit de limites :
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :

$f'(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + (3+x)\times\left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(1 - \frac{3}{2} - \frac{x}{2}\right) = -\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{x+1}{2}\right)$.

2 et $\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$ étant supérieurs à zéro quel que soit x, le signe de $f'(x)$ est celui de $-(x+1)$.

• $-(x+1) > 0 \Leftrightarrow -1 > x$, donc $f'(x) > 0$ sur $]-\infty\,;\,-1[$;
• $-(x+1) < 0 \Leftrightarrow -1 < x$, donc $f'(x) < 0$ sur $]-1\,;\,+\infty[$;
• $-(x+1) = 0 \Leftrightarrow -1 = x$, donc $f'(-1) = 0$.

La fonction est donc croissante sur $]-\infty\,;\,-1[$ puis croissante sur $]-1\,;\,+\infty[$, $f(-1) = 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \approx 3,297$ étant le maximum de f sur $\mathbb{R}$.

3. Construire la courbe (Γ) représentative de f dans $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

4. On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$, d'où :

$u'(x) = 1$ et $v(x) = -2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$.

Toutes ces fonctions sont continues car dérivables ; on peut donc intégrer par parties :

$\mathrm{I} = \left[-2x\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\right]_{-3}^{0} + \displaystyle\int_{-3}^{0} 2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x = \left[-2x\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} - 4\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\right]_{-3}^{0} = -4 - 6\mathrm{e}^{\frac{3}{2}} + 4\mathrm{e}^{\frac{3}{2}} =$

$\mathrm{I} = -2\mathrm{e}^{\frac{3}{2}} - 4 \approx -12,96$.

5. (a) • Sur $]-3\,;\,-1[$, f est croissante de $f(-3) = 0$ à $f(-1) > 3,2$; la fonction f étant continue il existe donc un réel unique $\alpha \in]-3\,;\,-1[$ tel que $f(\alpha) = 3$.

La calculatrice donne $f(-2) \approx 0,368$ et $f(-1,5) \approx 0,7$, donc $-2 < \alpha < -\dfrac{3}{2}$.

• Sur $]-1\,;\,2[$, f est décroissante de $f(-1) \approx 3,2$ à $f(2) \approx 1,8$; la fonction f étant continue il existe donc un réel unique $\beta \in]-1\,;\,2[$ tel que $f(\beta) = 3$.

(b) **graphiquement :**

• si $m < 0$, on voit que l'équation $f(x) = m$ a une solution (inférieure à -3) ;
• si $0 < m < 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$, on voit que l'équation $f(x) = m$ a deux solutions ;
• si $m = 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$, on voit que l'équation $f(x) = m$ a une solution -1 ;

- si $m > 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$, on voit que l'équation $f(x) = m$ n'a pas de solution.

Partie B

$\varphi(x) = 3\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 3$.

1. $f(x) = 3 \Leftrightarrow (x+3)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} = 3 \Leftrightarrow x + 3 = 3\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \Leftrightarrow x = 3\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 3 \Leftrightarrow x = \varphi(x)$.
2. (a) $\varphi'(x) = 3 \times \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} = \frac{3}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} > 0$ car produit de deux nombres supérieurs à zéro ;
   $\varphi''(x) = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} = \frac{3}{4} \times \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} > 0$.
   α est défini par $f(\alpha) = 3 \Leftrightarrow \varphi(\alpha) = \alpha \Leftrightarrow 3\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}} = \alpha + 3$.
   Donc $\varphi'(\alpha) = \dfrac{3\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}}}{2} = \dfrac{\alpha+3}{2}$.

   (b) Comme $\varphi''(x) > 0$, la fonction φ' est croissante sur $\mathbb{R}$.
   Comme $\varphi'(x) > 0$, la fonction φ est croissante sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que, pour tout x appartenant à I ;

   (a) Sur $[-2\ ;\ \alpha]$, la fonction φ est croissante de $f(-2) = \dfrac{3}{\mathrm{e}} - 3 \approx -1,8 > -2$ à $\varphi(\alpha) = \alpha$, donc $\varphi(x) \in \mathrm{I}$.

   (b) φ' est croissante sur $[-2\ ;\ \alpha]$, donc
   $$\varphi'(-2) \leqslant \varphi'(x) \leqslant \varphi'(\alpha) \Leftrightarrow 3 \times \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-1} \leqslant \varphi'(x) \leqslant \frac{\alpha+3}{2}.$$
   Or $\dfrac{3}{2\mathrm{e}} > \dfrac{1}{2}$ et $\alpha \leqslant -\dfrac{3}{2} \Rightarrow \dfrac{\alpha+3}{2} \leqslant \dfrac{3}{4}$.
   Donc $\dfrac{1}{2} < \varphi'(x) \leqslant \dfrac{3}{4}$.

   (c) On intègre l'encadrement précédent sur l'intervalle $[x\ ;\ \alpha]$ $(x \leqslant \alpha)$:
   $$\int_x^\alpha \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^\alpha \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^\alpha \frac{3}{4}\,\mathrm{d}t.$$
   La première intégrale est bien entendue positive. On peut donc écrire :
   $0 < \left[\dfrac{1}{2}t\right]_x^\alpha \leqslant \varphi(\alpha) - \varphi(x) \leqslant \left[\dfrac{3}{4}t\right]_x^\alpha$ ou encore
   $0 \leqslant \dfrac{1}{2}(x-\alpha) \leqslant \varphi(\alpha) - \varphi(x) \leqslant \dfrac{3}{4}(x-\alpha)$

$$\begin{cases} u_0 &= -2 \\ u_{n+1} &= \varphi(u_n) \end{cases}$$

4. (a) *Initialisation* : $u_0 = -2 \in \mathrm{I}$. La relation est vraie au rang 0.
   Hérédité : supposons que pour $n \in \mathbb{N}$ on ait $u_n \in \mathrm{I}$. On a montré à la question 3. a. que si $u_n \in \mathrm{I}$, alors $\varphi(u_n) \in \mathrm{I}$, donc $u_{n+1} \in \mathrm{I}$.
   La relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, elle est vraie au rang $n+1$.
   On a donc montré par le principe de récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathrm{I}$.

   (b) En utilisant l'encadrement de la question 3. c. avec $u_n \in \mathrm{I}$, on obtient :
   $$0 \leqslant \varphi(\alpha) - \varphi(u_n) \leqslant \frac{3}{4}(\alpha - u_n) \Leftrightarrow 0 \leqslant \alpha - u_{n+1} \leqslant \frac{3}{4}(\alpha - u_n).$$
   Or $-2 < \alpha < -\dfrac{3}{2}$ et $u_0 = -2$ entraînent que :
   $$0 \leqslant \alpha - u_0 \leqslant \frac{1}{2} \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^0 \quad (1).$$
   Supposons qu'il existe un entier p tel que $0 \leqslant \alpha - u_p \leqslant \left(\dfrac{3}{4}\right)^p$.
   En utilisant l'encadrement (1), on peut donc écrire :
   $0 \leqslant \alpha - u_{p+1} \leqslant \dfrac{3}{4} \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^p$ ou encore $0 \leqslant \alpha - u_{p+1} \leqslant \left(\dfrac{3}{4}\right)^{p+1}$.
   On a donc montré par récurrence que pour tout naturel n,
   $0 \leqslant \alpha - u_n \leqslant \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.

   (c) Comme $-1 < \dfrac{3}{4} < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 0$, donc par application du théorème des « gendarmes », $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha - u_n = 0$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$

   (d) On a $\left(\dfrac{3}{4}\right)^p \leqslant 10^{-2} \Rightarrow p\ln\left(\dfrac{3}{4}\right) \leqslant -2\ln 10$, par croissance de la fonction logarithme népérien, d'où puisque $\ln\left(\dfrac{3}{4}\right) < 0$,
   $$p \geqslant \frac{-2\ln 10}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)}.$$
   Or $\dfrac{-2\ln 10}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)} \approx 16,008$.
   Il faut donc prendre $p = 17$. La calculatrice donne $u_{17} \approx -1,75$ au centième près.
   L'encadrement $-1,75 < u_{17} < -1,74$ et celui de α, $\quad u_{17} < \alpha < u_{17} + 10^{-2}$ permet de conclure :
   $-1,75 < \alpha - 1,73$.