Devoir Maison 03 - Eléments de Correction

Exercice 1

$x \in I = \left]0, \pi\right[$, $\begin{cases} (E_1) : & y' \sin(x) - y \cos(x) = \sin^2(x)\, e^x \\ (E_2) : & y'' + y = \big(\sin(x) + 2\cos(x)\big)\, e^x \end{cases}$

1. — Commençons par montrer que, sur I, une solution de (E_1) est deux fois dérivable. Comme $\sin(x)$ ne s'annule pas sur I, une solution y de (E_1) vérifie $y' = \dfrac{y\cos(x) + e^x \sin^2 x}{\sin x}$. y étant dérivable, le membre de droite (donc y') est à son tour dérivable. cqfd.

   — Si y est solution de (E_1), nous avons : $y' \sin(x) - y\cos(x) = \sin^2(x)\, e^x$.

   En dérivant, il vient : $y'' \sin(x) + y \sin(x) = e^x \left(\sin^2(x) + 2\sin(x)\cos(x)\right)$.

   On simplifie par $\sin(x) \neq 0$. Il reste : $y'' + y = e^x \left(\sin(x) + 2\cos(x)\right)$ ce qui montre bien que y est solution de (E_2). $\boxed{\mathcal{S}_{E_1} \subset \mathcal{S}_{E_2}}$

2. (a) Le changement de fonction $z = \dfrac{y}{e^x}$ est valide puisque $x \mapsto e^x$ est deux fois dérivable et ne s'annule pas.

   (b) En dérivant : $y = z\, e^x$, $y' = \left(z' + z\right)$, $y'' = \left(z'' + 2z' + z\right)$. On remplace dans (E_2) et on simplifie par $e^x \neq 0$ $\boxed{(E_3) : \quad z' + 2z' + 2z = \sin(x) + 2\cos(x)}$

   (c) (E_3) est une équation linéaire du second ordre à coefficients constants (avec second membre).

   — l'équation caractéristique $t^2 + 2t + 2 = 0$ a pour solutions $t = -1 \pm i$.

   — Les solutions de l'ESSMA sont donc $z = e^{-x}\left(A\sin(x) + B\cos(x)\right)$ $A, B \in \mathbb{R}$

   — On recherche une solution particulière de (E_3) sous la forme :

   $$\left.\begin{array}{rl|l} z & = \alpha\sin x + \beta\cos x & 2 \\ z' & = -\beta\sin x + \alpha\cos x & 2 \\ z'' & = -\alpha\sin x - \beta\cos x & 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \sin x + 2\cos x = (\alpha - 2\beta)\sin x + (2\alpha + \beta)\cos x$$

   Par identification : $\begin{cases} \alpha - 2\beta = 1 \\ 2\alpha + \beta = 2 \end{cases}$ donne $\alpha = 1,\ \beta = 0$.

   Les solutions de (E_3) sont donc $\boxed{z = e^{-x}\left(A\sin(x) + B\cos(x)\right) + \sin(x) \quad A, B \in \mathbb{R}}$

   Comme $y = z\, e^x$,

   les solutions de (E_2) sont $\boxed{y = A\sin(x) + B\cos(x) + e^x \sin(x) \quad A, B \in \mathbb{R}}$

   D'après la question **1**, les solutions de (E_1) sont de cette forme. On remplace dans (E_1), ce qui donnera les conditions pour être solution :

   $$\begin{array}{rl|l} y & = A\sin(x) + B\cos(x) + e^x \sin x & -\cos x \\ y' & = A\cos(x) - B\sin(x) + e^x\left(\sin x + \cos x\right) & \sin x \end{array}$$

   (E_1) est équivalente à $-B + e^x \sin^2 x = e^x \sin^2 x \Leftrightarrow B = 0$

   les solutions de (E_1) sont $\boxed{y = A\sin(x) + e^x \sin(x) \quad A \in \mathbb{R}}$

3. (E_1) est une équation linéaire du premier ordre.

   Solutions de l'ESSMA : $y = K\, e^{\int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx} = K\, e^{\ln|\sin x|} = K \underbrace{\sin x}_{y_0}$ (sur I, $\sin x > 0$)

   On recherche une solution particulière par la méthode de variation de la constante :

   $$\left.\begin{array}{rl|l} y & = \varphi\, y_0 & -\cos x \\ y' & = \varphi'\, y_0 + \varphi\, y_0' & \sin x \end{array}\right\} \Rightarrow (E_1) \text{ est équivalente à } e^x \sin^2 x = \varphi' \sin^2 x,$$

   d'où $\varphi' = e^x$ (sin ne s'annule pas sur I).

   La solution particulière est $e^x \sin x$. Les solutions de (E_1) sont $\boxed{(K + e^x)\sin x \quad K \in \mathbb{R}}$

   On trouve le même résultat . . . OUF !!!