

Devoir Maison 03

Pour le lundi 6 octobre 2025

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Exercice 1

Soit, pour $x \in I =]0, \pi[$, les deux équations différentielles suivantes :

$$(E_1) : \quad y' \sin(x) - y \cos(x) = \sin^2(x) e^x$$

$$(E_2) : \quad y'' + y = (\sin(x) + 2 \cos(x)) e^x$$

1. Sans intégrer les équations, montrer que l'ensemble des solutions de (E_1) est inclus dans l'ensemble des solutions de (E_2) . *Pour cela on montrera qu'une solution de (E_1) est deux fois dérivable et qu'elle vérifie (E_2) .*
2. (a) Justifier le changement de fonction inconnue $z = \frac{y}{e^x}$. *Pour cela on montrera que z est deux fois dérivable si et seulement si y l'est.*
(b) Quelle est l'équation (E_3) obtenue quand on applique ce changement à (E_2) ? *Pour répondre à cette question, on calculera y' et y'' à partir de l'égalité $z \times e^x = y$.*
(c) Intégrer (E_3) . *Autrement dit résoudre (E_3) en tant qu'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.*

En déduire les solutions réelles de (E_2) , puis les solutions réelles de (E_1) . *Autrement dit exprimer y à partir de z pour obtenir les solutions de (E_2) . Puis trier parmi les solutions de (E_2) celles qui vérifient (E_1) .*

3. Intégrer directement l'équation (E_1) . Comparer les résultats.