Devoir Maison 02

Pour le lundi 2 Octobre 2023

> La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Exercice 1

Pour chaque entier naturel n, on définit, sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ la fonction notée f_n par :

$$f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} + n \ln x,$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

Partie A : Etude du cas particulier $n = 0$

f_0 est donc la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f_0(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$.

1. Construire dans un repère orthonormal, la courbe représentative de la fonction exponentielle, puis tracer sa tangente au point d'abscisse 0.
2. Résolution graphique d'une inéquation :
   (a) Justifier graphiquement l'inégalité suivante :
   $$\text{pour tout réel } u,\ \mathrm{e}^u \geqslant u + 1.$$
   (b) En déduire que pour tout réel x,
   $$\mathrm{e}^{-x} + x - 1 \geqslant 0,\ \text{puis que,}\ 1 + (x-1)\mathrm{e}^x \geqslant 0.$$
3. Limites :
   (a) Déterminer la limite de f_0 en $+\infty$.
   (b) Déterminer la limite de f_0 en 0.
4. Sens de variations :
   (a) Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ on a $f_0'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x(x-1)+1}{x^2}$.
   (b) En déduire le sens de variation de f_0.
5. On appelle $\mathcal{C}_0$ la courbe représentative de f_0 dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ pour lequel l'unité graphique est 2 cm.
   Tracer $\mathcal{C}_0$ dans ce repère et placer le point A de coordonnées $(0\,;\,1)$.

Partie B : Etude de la famille de fonctions f_n pour $n \geqslant 1$

On appelle $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ précédent.

1. Déterminer le sens de variation de f_n sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
2. Déterminer les limites de f_n en $+\infty$ et en 0.
   En déduire que $\mathcal{C}_n$ possède une asymptote qu'on précisera.
3. Etudier les positions respectives des courbes $\mathcal{C}_{n+1}$ et $\mathcal{C}_n$.

4. Montrer que toutes les courbes $\mathcal{C}_n$ passent par un même point B dont on précisera les coordonnées.
5. (a) Montrer qu'il existe un unique réel α_1, appartenant à l'intervalle $[0{,}2\,;\,0{,}9]$ tel que $f_1(\alpha_1) = 0$.
   (b) Montrer que $f_n(\alpha_1) < 0$ pour tout entier naturel $n > 1$.
   (c) Pour tout entier naturel $n > 1$, montrer qu'il existe un unique réel α_n appartenant à l'intervalle $[\alpha_1\ ;\ 1]$ tel que $f_n(\alpha_n) = 0$.
6. (a) En utilisant la **partie A** montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,1]$,
$$\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} \leqslant \mathrm{e} - 1.$$
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel non nul n, $\ln(\alpha_n) \geqslant \dfrac{1-\mathrm{e}}{n}$, puis que, $\alpha_n \geqslant \mathrm{e}^{\frac{1-\mathrm{e}}{n}}$.
   (c) Déterminer la limite de la suite (α_n).
7. Construire sur le graphique précédent, les courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$.

Partie C : Etude d'une suite d'intégrales

Pour tout entier naturel n, on appelle I_n l'intégrale
$$I_n = \int_1^{\frac{3}{2}} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Donner une interprétation graphique de cette intégrale.
2. Etudier le sens de variation de la suite (I_n).
3. Démontrer que l'aire comprise entre les courbes $\mathcal{C}_{n+1}$, et $\mathcal{C}_n$ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \dfrac{3}{2}$ est constante.

Exercice 2 (optionnel)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\sin x \cos x}{(1+\cos x)^2}$

1. Déterminer le domaine de définition D de f.
2. Etudier la parité de f.
3. Démontrer que : $\forall x \in D, f(x + 2\pi) = f(x)$. Interpréter graphiquement.
4. (a) Etudier les variations de f sur l'intervalle $[0; \pi[$.
   (b) (Question difficile) Calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers π par valeurs inférieures.
5. Construire la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.