Devoir Maison 02 - Eléments de Correction

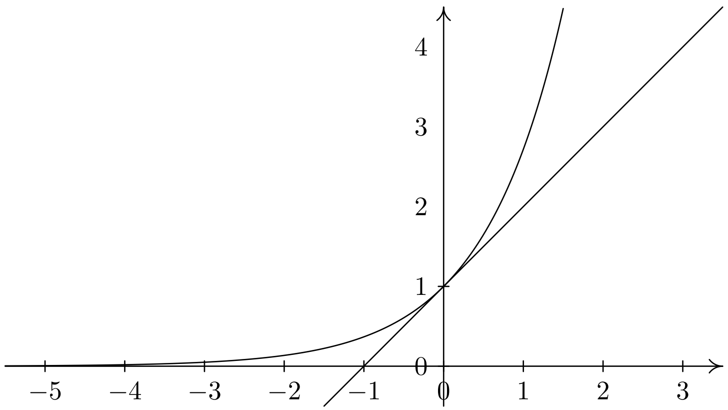
Exercice 1

$$f_n(x) = \frac{e^x - 1}{x} + n \ln x,$$

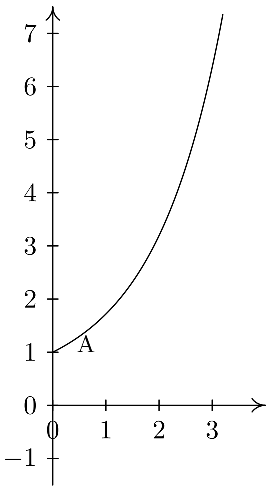
Partie A : Etude du cas particulier $n = 0$

f_0 est donc la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f_0(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$.

1.



2. Résolution graphique d'une inéquation :
   (a) Avec $f(x) = e^x$, $f(0) = 1$, $f'(x) = e^x$ et $f'(0) = 1$.
   Une équation de la tangente au point d'abscisse 0 est :
   $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$, soit $y - 1 = x$ ou $y = x + 1$.
   On voit sur la figure que quel que soit le réel u, la courbe est au dessus de la tangente soit :
   $e^u \geqslant u + 1$.
   (b) En posant pour tout réel u, $x = -u$, l'inégalité précédente s'écrit :
   $e^{-x} \geqslant -x + 1 \Leftrightarrow e^{-x} + x - 1 \geqslant 0$.
   En multipliant chaque membre de l'inégalité précédente par e^x, on obtient :
   $1 + (x - 1)e^x \geqslant 0$.
3. Limites :
   (a) On a $f_0(x) = \dfrac{e^x}{x} - \dfrac{1}{x}$.
   Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$, donc par somme de limites
   $\lim\limits_{x \to +\infty} f_0(x) = +\infty$.
   (b) Avec la fonction $f(x) = e^x$, on a par définition $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^0}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = f'(0) = e^0 = 1$. Donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.
4. Sens de variations :
   (a) La fonction f_0 quotients de fonctions dérivables sur $]0\ ;\ +\infty[$, le dénominateur étant non nul est dérivable et sur cet intervalle :
   $f_0'(x) = \dfrac{xe^x - (e^x - 1)}{x^2} = \dfrac{e^x(x - 1) + 1}{x^2}$.
   (b) On a vu à la fin de la question précédente que $1 + (x - 1)e^x \geqslant 0$, donc $f_0'(x) \geqslant 0$ sur $]0\ ;\ +\infty[$. La fonction f_0 est croissante de 1 à plus l'infini.
5.



Partie B : Etude de la famille de fonctions f_n pour $n \geqslant 1$

1. La fonction $f_n(x) = \dfrac{e^x - 1}{x} + n \ln x$ somme de quotient de fonctions dérivables le dénominateur ne s'annulant pas sur $]0\ ;\ +\infty[$ est dérivable et sur cet intervalle :
   $f_n'(x) = \dfrac{xe^x - (e^x - 1)}{x^2} + \dfrac{n}{x} = \dfrac{e^x(x - 1) + 1 + nx}{x^2}$.
   Or on a vu que $e^x(x - 1) + 1 \geqslant 0$, donc comme $nx > 0$, $e^x(x - 1) + 1 + nx > 0$: donc $f_n'(x) > 0$: les fonctions f_n sont croissantes sur $]0\ ;\ +\infty[$.
2. • On a vu que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x - 1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} n \ln x = +\infty$, d'où par somme de limites :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.

- On a vu que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$ et on a $\lim\limits_{x\to 0} n\ln x = -\infty$, d'où par somme de limites : $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x) = -\infty$.

Le dernier résultat montre que géométriquement l'axe des ordonnées est asymptote verticale à $\mathcal{C}_n$ au voisinage de zéro.

3. Soit $d_n(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x) = \dfrac{e^x-1}{x} + (n+1)\ln x - \left(\dfrac{e^x-1}{x} + n\ln x\right) = \ln x$.

   Or on sait que la fonction ln est négative entre 0 et 1, s'annule en 1 et est positive sur $[1~;~+\infty[$. Donc :
   - Sur $]0~;~1[$ $\mathcal{C}_{n+1}$ est au dessous de $\mathcal{C}_n$;
   - Sur $]1~;~+\infty[$ $\mathcal{C}_{n+1}$ est au dessus de $\mathcal{C}_n$;
   - Toutes les courbes $\mathcal{C}_n$ contiennent le point de coordonnées $(1~;~e-1)$.
4. On a vu à la question précédente que $d_n(x) = n\ln x$, donc $d_n(1) = 0$: toutes les courbes $\mathcal{C}_n$ contiennent donc le point $B(1~;~e-1)$.
5. (a) On a $f_1(x) = \dfrac{e^x-1}{x} + \ln x$.

   On a vu que les fonctions f_n sont strictement croissantes de moins l'infini à plus l'infini ; comme elles sont continues car dérivables sur $]0~;~+\infty[$, il existe donc un réel unique $\alpha_1 \in]0~;~+\infty[$ tel que $f_1(\alpha_1) = 0$.

   On a $f_1(1) = e-1 > 0$, donc $\alpha_1 \in]0~;~1[$;

   $f(0,2) = \dfrac{e^{0,2}-1}{0,2} + \ln 0,2 \approx -0,502$ et

   $f(0,9) = \dfrac{e^{0,9}-1}{0,9} + \ln 0,9 \approx 7,2$, donc $\alpha_1 \in]0,2~;~0,9[$.

   (b) On a vu à la question 3 que sur $[0;~1[$, $\mathcal{C}_{n+1}$ est au dessous de $\mathcal{C}_n$, donc en particulier que $\mathcal{C}_2$ est au dessous de $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_3$ est au dessous de $\mathcal{C}_2$, ...et donc que pour $n > 1$, $\mathcal{C}_n$ est au dessous de $\mathcal{C}_1$, donc en particulier que pour tout $n > 1$, $f_n(\alpha_1) < f_1(\alpha_1)$.

   Or $f_1(\alpha_1) = 0$, donc $f_n(\alpha_1) < 0$ pour tout $n > 1$.

   (c) Quel que soit $n > 1$, on vient de voir que $f_n(\alpha_1) < 0$ et on sait que $f_n(1) > 0$; la fonction f_n étant continue car dérivable s'annule donc pour une unique valeur α_n de $]\alpha_1~;~1[$.
6. (a) On a vu dans la partie A que la fonction f_0 est strictement croissante en particulier sur l'intervalle $[0;1[$, donc

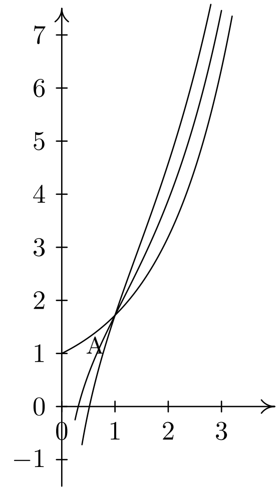
   $$0 < x < 1 \Rightarrow 1 < \frac{e^x-1}{x} < e-1.$$

   (b) Par définition α_n annule la fonction f_n, soit :
   $\dfrac{e_n^{\alpha}-1}{\alpha_n} + n\ln\alpha_n = 0$.

   On a vu au 6. a que si $x \in]0~;~1]$, alors $\dfrac{e^x-1}{x} < e-1$donc en particulier pour α_n, $\dfrac{e^{\alpha_n}-1}{\alpha_n} < e-1 \Rightarrow \dfrac{e^{\alpha_n}-1}{\alpha_n} + n\ln\alpha_n < e-1+n\ln\alpha_n$ ou encore $0 < e-1+n\ln\alpha_n \Leftrightarrow n\ln\alpha_n > 1-e \Leftrightarrow \ln\alpha_n > \dfrac{1-e}{n}$.

   La fonction exponentielle étant croissante, on a :
   $\ln\alpha_n > \dfrac{1-e}{n} \Rightarrow e^{\ln\alpha_n} > e^{\frac{1-e}{n}}$ ou encore $\alpha_n > e^{\frac{1-e}{n}}$.

   (c) On a donc $e^{\frac{1-e}{n}} < \alpha_n < 1$; or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1-e}{n} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{1-e}{n}} = 1$, donc d'après le théorème des « gendarmes », $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 1$.



7.

Partie C : Etude d'une suite d'intégrales

$$I_n = \int_1^{\frac{3}{2}} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. On a vu que sur $[1~;~+\infty[$, $f_n(x) \geqslant 0$, donc I_n est l'aire (en unité d'aire) de la surface limitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_n$ et les droites verticales d'équation $x = 1$ et $x = \frac{3}{2}$.

2. $I_{n+1} - I_n = \int_1^{\frac{3}{2}} f_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x - \int_1^{\frac{3}{2}} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ et par linéarité de l'intégrale :

   $I_{n+1} - I_n = \int_1^{\frac{3}{2}} [f_{n+1}(x) - f_n(x)]\,\mathrm{d}x.$

   Or on a vu que pour $x \geqslant 1$, $f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x)$, d'où $f_{n+1}(x) - f_n(x) \geqslant 0$, donc $I_{n+1} - I_n$ est l'intégrale d'une fonction positive ; sur l'intervalle $\left[1\ ;\ \frac{3}{2}\right]$, cette intégrale est positive et par conséquent la suite (I_n) est croissante.
3. D'après la question précédente l'aire comprise entre les courbes $\mathcal{C}_{n+1}$ et $\mathcal{C}_n$ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \dfrac{3}{2}$ est, en unité d'aire, l'intégrale

   $\int_1^{\frac{3}{2}} [f_{n+1}(x) - f_n(x)]\,\mathrm{d}x = \int_1^{\frac{3}{2}} \ln x\,\mathrm{d}x.$

   L'unité d'aire est égale à $2 \times 2 = 4$ cm^2, donc l'aire cherchée est égale à $4\int_1^{\frac{3}{2}} \ln x\,\mathrm{d}x$ aire indépendante de n et donc constante.

   Rem. On trouve par une intégration par parties qu'une primitive de la fonction $x \longmapsto \ln x$ est la fonction $x \longmapsto x\ln x - x$.

   L'aire cherchée est donc :

   $\int_1^{\frac{3}{2}} 4\ln x \quad \mathrm{d}x = 4\,[x\ln x - x]_1^{\frac{3}{2}} = 4\left[\frac{3}{2}\ln\frac{3}{2} - \frac{3}{2} - (1\ln 1 - 1)\right] = 4\left[\frac{3}{2}\ln\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right] =$

   $6\ln\frac{3}{2} - 2 \approx 0,433$ cm^2.

   On a ombré cette surface dans la figure au dessus, aire entre $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\sin x \cos x}{(1+\cos x)^2}$

1. La fonction est définie pour tout réel x tel que $1 + \cos x \neq 0$

   or $1 + \cos x = 0 \Leftrightarrow x \equiv \pi[2\pi]$ donc le domaine de définition D de f est $\boxed{D = \mathbb{R} - \{\pi[2\pi]\}}$.
2. $\forall x \in D, -x \in D$ et $f(-x) = \dfrac{\sin(-x)\cos(-x)}{(1+\cos(-x))^2} = \dfrac{-\sin x \cos x}{(1+\cos x)^2} = -f(x)$ donc f est impaire.
3. $\forall x \in D, f(x+2\pi) = \dfrac{\sin(x+2\pi)\cos(x+2\pi)}{(1+\cos(x+2pi))^2} = \dfrac{\sin x\cos x}{(1+\cos x)^2} = f(x).$

   f est périodique de période 2π donc on obtient toute la courbe représentative de f à partir de celle construite sur $]-\pi;\pi[$ par itération. Sachant que de plus f est impaire et que la courbe est donc symétrique par rapport à l'origine on peut encore restreindre l'étude à l'intervalle $[0;\pi[$.
4. (a) f est dérivable sur $[0;\pi[$ en tant que produit et quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0;\pi[$ avec un dénominateur ne s'annulant pas sur $[0;\pi[$.

   $$\begin{aligned}
   \forall x \in [0;\pi[, f'(x) &= \frac{(\cos^2 x - \sin^2 x)(1+\cos x)^2 + 2(1+\cos x)\sin^2 x\cos x}{(1+\cos x)^4} \\
   &= \frac{\cos^2 x - \sin^2 x + \cos^3 x - \sin^2 x\cos x + 2\sin^2 x \cos x}{(1+\cos x)^3} \\
   &= \frac{\cos^2 x - 1 + \cos^2 x + \cos^3 x + \cos x - \cos^3 x}{(1+\cos x)^3} \\
   &= \frac{2\cos^2 x + \cos x - 1}{(1+\cos x)^3} \\
   &= \frac{(2\cos x - 1)(\cos x + 1)}{(1+\cos x)^3} \\
   &= \frac{2\cos x - 1}{(1+\cos x)^2}
   \end{aligned}$$

   Pour tout réel x appartenant à $[0;\pi[$, $(1+\cos x)^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $2\cos x - 1$

   $2\cos x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0;\frac{\pi}{3}]$ alors f est croissante sur $[0;\frac{\pi}{3}]$ et décroissante sur $[\frac{\pi}{3};\pi$

   (b) Pour x appartenant à $[0;\pi[$, $f(x) = \dfrac{\sin x \cos x}{(1+\cos x)^2} = \dfrac{\sqrt{1-\cos x^2}\cos x}{(1+\cos x)^2}$.

   $f(x) = \dfrac{\sqrt{(1-\cos x)(1+\cos x)}\cos x}{(1+\cos x)^2}$.

   $f(x) = \dfrac{\sqrt{(1-\cos x))}\cos x}{(1+\cos x)^{\frac{3}{2}}}$.

   donc $\boxed{\lim_{x\to\pi^-} f(x) = -\infty}$
5.