

Devoir Maison 02 - Eléments de Correction

Exercice 1

Eléments de correction rapide sur l'exercice :

a) Par la formule du binôme

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = (1 + (-1))^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

b) On a

$$\binom{n}{k} \binom{k}{\ell} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{k!}{\ell!(k-\ell)!} = \frac{n!}{\ell!(n-\ell)!} \frac{(n-\ell)!}{(n-k)!(k-\ell)!} = \binom{n}{\ell} \binom{n-\ell}{k-\ell}$$

c) On a

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} y_k = \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^k (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{\ell} x_\ell = \sum_{\ell=0}^n x_\ell \sum_{k=\ell}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{\ell}$$

Or

$$\sum_{k=\ell}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{\ell} = (-1)^{n-\ell} \binom{n}{\ell} \sum_{k=\ell}^n (-1)^{k-\ell} \binom{n-\ell}{k-\ell}$$

avec

$$\sum_{k=\ell}^n (-1)^{k-\ell} \binom{n-\ell}{k-\ell} = \begin{cases} 1 & \text{si } \ell = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Par suite

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} y_k = x_n$$

Exercice 2

Eléments de correction rapide sur l'exercice :

a) Si (x, y) est solution alors $(2) \Rightarrow x(x+y) = 0$ donc $x = 0$ ou $y = -x$.Si $x = 0$ alors (1) donne $y = \pm 1/\sqrt{2}$.Si $y = -x$ alors (1) donne $x = \pm 1/\sqrt{3}$.

Inversement : ok

Finalement : $\mathcal{S} = \{(0, 1/\sqrt{2}), (0, -1/\sqrt{2}), (1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}), (-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})\}$.b) Si (x, y) est solution alors (1) - (2) donne $(x-y)^2 = 0$ d'où $x = y$ puis (1) donne $x = y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.Inversement : ok. Finalement $\mathcal{S} = \{(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), (-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})\}$.c) Si (x, y) est solution alors (1) et (2) donnent $x^4 = x$ d'où $x = 0$ ou $x = 1$.
Si $x = 0$ alors $y = 0$. Si $x = 1$ alors $y = 1$.Inversement : ok. Finalement $\mathcal{S} = \{(0, 0), (1, 1)\}$.**Exercice 3**

Eléments de correction rapide sur l'exercice :

On calcule x au cube par la formule du binôme.

On obtient l'égalité cherchée

 $x^3 = 6x + 40$. 4 est solution apparente de cette équation.

$$x^3 - 6x - 40 = (x-4)(x^2 + 4x + 10)$$

Les solutions de l'équation sont 4, $-2 + i\sqrt{6}$, $-2 - i\sqrt{6}$. On conclut $x = 4$.**Exercice 4**Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On se propose de résoudre dans $\mathbb{R}$ par une méthode trigonométrique l'équation :

$$(E) : X^3 + aX^2 + bX + c = 0$$

A/ Préliminaire Soit $m \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$.Posons $X = x - m$.Alors (E) devient $x^3 - 3x^2m + 3xm^2 + m^3 + a(x^2 - 2xm + m^2) + bx - bm + c = 0$.
d'où $(E) \Leftrightarrow x^3 + (-3m + a)x^2 + (3m^2 - 2am + b)x + (m^3 + am^2 - bm + c) = 0$ En posant $m = \frac{a}{3}$, on obtient :

$$(E) \Leftrightarrow x^3 + (3m^2 - 2am + b)x + (m^3 + am^2 - bm + c) = 0$$

Notons $p = 3m^2 - 2am + b$ et $q = m^3 + am^2 - bm + c$, on a p et q des réels et $(E) \Leftrightarrow x^3 + px + q = 0$. Notons (F) cette dernière équation.

On se propose donc dans la suite de résoudre l'équation (F) quand p et q sont réels.

B/ Nombre des solutions réelles de l'équation (F)

1. Etudions les variations de la fonction f définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + px + q$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que polynôme et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 + p$. On a deux cas :

- Si $p < 0$, f' sera positive sur $] -\infty; -\sqrt{\frac{-p}{3}}]$ et sur $[\sqrt{\frac{-p}{3}}; +\infty[$, f y sera donc croissante. f' sera négative sur $[-\sqrt{\frac{-p}{3}}; \sqrt{\frac{-p}{3}}]$ et f y sera décroissante.
- Si $p \geq 0$, f' est positive sur $\mathbb{R}$ et f y est strictement croissante.

2. Déterminons le nombre de solutions de l'équation (F) .

- Si $p \geq 0$, f est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$ de limites $-\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$. Par bijection F possède une unique solution.
- Si $p < 0$, f est croissante puis décroissante puis croissante.

F aura 3 solutions distinctes si et seulement si les valeurs prises en $-\sqrt{\frac{-p}{3}}$ et en $-\sqrt{\frac{-p}{3}}$ sont de signes contraires. Sinon F aura encore une seule solution.

Résolvons $f(-\sqrt{\frac{-p}{3}}) \times f(\sqrt{\frac{-p}{3}}) < 0$:

$$\begin{aligned} f(-\sqrt{\frac{-p}{3}}) \times f(\sqrt{\frac{-p}{3}}) &< 0 \\ \left(-\sqrt{\frac{-p}{3}}\left(\frac{-p}{3} + p\right) + q\right) \left(\sqrt{\frac{-p}{3}}\left(\frac{-p}{3} + p\right) + q\right) &< 0 \\ q^2 - \frac{p}{3}\left(\frac{2p}{3}\right)^2 &< 0 \\ q^2 + 4\frac{p^3}{27} &< 0 \\ 4p^3 + 27q^2 &< 0 \end{aligned}$$

Finalement F a trois solutions distinctes si et seulement si $D = 4p^3 + 27q^2 < 0$.

Sinon F n' a qu'une solution dans $\mathbb{R}$.

3. Pour notre exemple on détermine dans le signe de D . Mais il faut d'abord déterminer m . Pour $4X^3 + 48X^2 + 165X + 175 = 0$, l'équation devient (E) : $X^3 + 12X^2 + \frac{165}{4}X + \frac{175}{4} = 0$ avec $a = 12$, $b = \frac{165}{4}$, $c = \frac{175}{4}$ et on a $m = \frac{12}{3} = 4$. Et $D = 4p^3 + 27q^2 = 4(3m^2 - 2am + b)^3 + 27(m^3 + am^2 - bm + c)^2$

$$\begin{aligned} D &= 4(3 \times 4^2 - 2 \times 12 \times 4 + \frac{165}{4})^3 + 27(4^3 + 12 \times 4^2 - 4 \times \frac{165}{4} + \frac{175}{4})^2 \\ D &= 4(48 - 96 + \frac{165}{4})^3 + 27(64 + 192 - 165 + \frac{175}{4})^2 = 4(\frac{357}{4})^3 + 27(\frac{539}{4})^2 > 0. \end{aligned}$$

Ainsi $D > 0$ et l'équation admet une unique solution.

C/ Calcul approché des solutions dans le cas $D \leq 0$

1. Dans cette partie φ désigne un réel donné de $[0, \pi]$.

- (a) Résolvons en fonction de φ l'équation d'inconnue x dans $[0, \pi]$:

$$\cos(3x) = \cos(\varphi) \Leftrightarrow 3x \equiv \varphi [2\pi] \text{ ou } 3x \equiv -\varphi [2\pi]$$

$$\cos(3x) = \cos(\varphi) \Leftrightarrow x \equiv \frac{\varphi}{3} [\frac{2\pi}{3}] \text{ ou } x \equiv -\frac{\varphi}{3} [\frac{2\pi}{3}]$$

On cherche les solutions dans $[0, \pi]$ sachant que φ appartient à $[0, \pi]$. On obtient les solutions par encadrement :

$$\boxed{\frac{\varphi}{3}, \frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi}{3} \text{ et } \frac{-\varphi}{3} + \frac{4\pi}{3}}$$

- (b) Soit x un réel, exprimons $\cos(3x)$ en fonction de $\cos x$.

$$\begin{aligned} \cos(3x) &= \cos(x + 2x) = \cos(x)\cos(2x) - \sin(x)\sin(2x) \\ &= \cos(x)(\cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x)) - \sin(x)2\sin(x)\cos(x) \\ &= \cos^3(x) - \cos(x)(1 - \cos^2(x)) - 2(1 - \cos^2(x))\cos(x) \\ &= \cos^3(x) - 3\cos(x)(1 - \cos^2(x)) \\ &= 4\cos^3(x) - 3\cos(x) \end{aligned}$$

- (c) Soit l'équation (T) : $4z^3 - 3z - \cos(\varphi) = 0$.

Cette équation de degré 3 a au plus 3 solutions.

Or en posant $z = \cos(x)$ on a $(T) \Leftrightarrow \cos(3x) = \cos(\varphi)$ qui a trois solutions distinctes pour x dans $[0, \pi]$

donc trois solutions distinctes pour z dans $[-1, 1]$.

Et les solutions de (T) sont

$$\boxed{\cos\left(\frac{\varphi}{3}\right), \cos\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) \text{ et } \cos\left(\frac{-\varphi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right)}.$$

2. On suppose que $D \leq 0$ donc $4p^3 + 27q^2 \leq 0$.

Or $27q^2 \geq 0$ donc $p^3 \leq 0$ d'où $p \leq 0$.

On exclut le cas p et q simultanément nuls et on obtient plus précisément $p < 0$.

- (a) Montrons, en posant $x = kz$ et $k > 0$, qu'un choix convenable de k et φ ramène la résolution de (F) à celle de (T) .

$$(F) \Leftrightarrow x^3 + px + q = 0 \Leftrightarrow k^3 z^3 + pkz + q = 0$$

On cherche k tel qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^*$ vérifiant $k^3 = 4\alpha$ et $pk = -3\alpha$ et $q = -\cos(\varphi)\alpha$.

Donc $\alpha = \frac{1}{4}k^3 = \frac{-1}{3}pk$ d'où $k^2 = \frac{-4}{3}p$

Or $p < 0$ et $k > 0$

Donc $k = \sqrt{\frac{-4}{3}p}$ et $\cos(\varphi) = \frac{-q}{\alpha} = \frac{-q}{\frac{-1}{3}pk} = \frac{3\sqrt{3}q}{2p\sqrt{-p}}$.

Il reste à vérifier que les valeurs proposées conviennent :

— $p < 0$ nous donne que $k > 0$

— $D \leq 0$ nous donne que $0 \leq \frac{27q^2}{-4p^3} \leq 1$ donc la valeur de $\cos(\varphi)$ trouvée est bien dans $[-1; 1]$ et on peut trouver φ dans $[0; \pi]$ qui convient.

— Les 3 équations $k^3 = 4\alpha$ et $pk = -3\alpha$ et $q = -\cos(\varphi)\alpha$ sont vérifiées.

Pour ces valeurs de k et φ , l'équation (F) est équivalente à (T) .