Devoir Maison 02

Pour le lundi 29 Septembre 2025

> La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Exercice 1

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$$
2. Soient $k, \ell, n \in \mathbb{N}$ tels que $\ell \leq k \leq n$. Comparer
$$\binom{n}{k}\binom{k}{\ell} \text{ et } \binom{n}{\ell}\binom{n-\ell}{k-\ell}$$
3. Soit (x_n) une suite de réels. On pose
$$\forall k \in \mathbb{N}, y_k = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} x_\ell$$
Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} y_k$$

Exercice 2

Résoudre les systèmes d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

1. $$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 1 \\ x^2 + xy = 0 \end{cases}$$
2. $$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 2xy = 1 \end{cases}$$
3. $$\begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases}$$

On pourra procéder par analyse-synthèse et pas forcément par équivalences.

Exercice 3

1. Observer que
$$x = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$$
est solution d'une équation de la forme
$$x^3 = \alpha x + \beta$$
avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
2. Remarquer que 4 est solution de l'équation précédente puis vérifier que
$$x^3 - 6x - 40 = (x-4)(x^2 + 4x + 10)$$
3. En déduire la résolution de cette dernière et déterminer x.

Exercice 4 (FACULTATIF)
Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On se propose de résoudre dans $\mathbb{R}$ par une méthode trigonométrique l'équation :

$$(E) : X^3 + aX^2 + bX + c = 0$$

A/ Préliminaire Montrer que, par le changement de variable $x = X + m$, et avec un choix convenable de m, on peut ramener la résolution de (E) à celle d'une équation (F) de la forme : $x^3 + px + q = 0$.

On se propose donc dans la suite de résoudre l'équation (F) quand p et q sont réels.

B/ Nombre des solutions réelles de l'équation (F)

1. Etudier les variations de la fonction f réelle de variable réelle définie par $f(x) = x^3 + px + q$, où p et q désignent des paramètres réels quelconques.
2. En déduire le nombre de solutions de l'équation (F) selon le signe de $D = 4p^3 + 27q^2$.
3. Donner, grâce aux questions précédentes, le nombre de solutions réelles des équations suivantes :

$$4X^3 + 48X^2 + 165X + 175 = 0 \tag{1}$$
$$64X^3 + 96X^2 + 36X + 2 - \sqrt{2} = 0 \tag{2}$$
$$36X^3 - 108X^2 + 99X - 25 = 0 \tag{3}$$

C/ Calcul approché des solutions dans le cas $D \leq 0$

1. Dans cette partie φ désigne un réel donné de $[0, \pi]$.
   (a) Résoudre en fonction de φ l'équation
   $$\exists x \in [0, \pi],\ \cos(3x) = \cos(\varphi)$$
   (b) Exprimer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos x$.
   (c) Montrer que l'équation (T) : $4z^3 - 3z - \cos(\varphi) = 0$ a toutes ses solutions dans $[-1, 1]$. En déduire que ces solutions sont
   $$\cos\left(\tfrac{\varphi}{3}\right), \quad \cos\left(\tfrac{\varphi+2\pi}{3}\right), \quad \cos\left(\tfrac{\varphi+4\pi}{3}\right)$$
2. On suppose que $D \leq 0$.
   (a) Montrer, en posant $x = kz$ et $k > 0$, qu'un choix convenable de k et φ ramène la résolution de (F) à celle de (T).
   (b) Appliquer à la résolution des équations (1) et (2) précédentes : on donnera des valeurs exactes puis approchées des solutions.

D/ Calcul approché des solutions dans le cas $D > 0$

1. a) Calculer $\mathrm{ch}(3x)$ en fonction de $\mathrm{ch}(x)$ et $\mathrm{sh}(3x)$ en fonction de $\mathrm{sh}(x)$
   b) Donner les expressions logarithmiques des réciproques *argch* et *argsh*.
2. On suppose que $D > 0$.
   a) Expliquer comment on peut résoudre l'équation (F) en modifiant la méthode vue dans le cas $D \leq 0$ en utilisant la fonction ch ou sh en lieu et place de la fonction cos.
   b) Déterminer les solutions réelles des équations suivantes :

$$36X^3 - 9X + 2 = 0 \tag{4}$$
$$12X^3 + 3X - 1 = 0 \tag{5}$$