Devoir Maison 01

Pour le lundi 18 Septembre 2023

> La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Remarque : certaines notions comme la parité ou les asymptotes ne sont pas forcément vues en terminale, n'hésitez pas à venir poser vos questions si nécessaire ! Mais cela nécessite de commencer le DM un peu avant le dernier week-end.

Exercice 1

On considère les fonctions f et g définies sur $]0,+\infty[$ par :

$$f(x) = x + 1 + \frac{\ln(x)}{x} \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 + 1 - \ln(x)$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. (a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.
   (b) Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe de f.
   (c) Montrer que $\mathcal{C}$ est au-dessus de $\mathcal{D}$ sur $[1,+\infty[$ et en dessous de $\mathcal{D}$ sur $]0,1]$.
2. (a) Calculer la dérivée de g. En déduire le sens de variation de g sur $]0,+\infty[$.
   (b) Montrer que $g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\ln(2)$. En déduire que $g(x)$ est positif strictement sur $]0,+\infty[$.
   (c) Montrer que la dérivée de f vérifie pour tout réel x strictement positif : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$
   (d) Déduire des questions précédentes le tableau des variations de f en y faisant figurer les limites trouvées en 1.a)
3. Tracer l'allure de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ dans un repère orthonormé d'unité 2cm.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

4. (a) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $u_n \geq n + 1$.
   (b) Déterminer le sens de variation et la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2

On considère la fonction f définie par : $f(x) = x + 2 - 2\ln(e^x + 1)$ et on note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonorrnal.

On définit la suite (u_n) par : $\begin{cases} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & f(u_n), \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Etude de la fonction f.

1. Justifier le fait que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout x réel, on a : $f(x) = -x + 2 - \ln(e^{-x} + 1)$.
   En déduire que f est paire sur $\mathbb{R}$.

3. Déterminer la limite de f quand x tend vers $+\infty$.
4. Démontrer que la droite D d'équation : $y = -x + 2$ est asymptote à C et étudier la position de la courbe C par rapport à l'asymptote D.
5. Calculer $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de f.
   Etudier le signe de f' et donner le tableau de variations de f.
6. Déterminer la solution, notée α, de l'équation $f(x) = x$.
7. Montrer que pour tout x réel : $f"(x) = -2\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$
8. En déduire que : $\forall x \in [0,1], \quad |f"(x)| \leqslant \dfrac{e-1}{e+1}$

Convergence de la suite (u_n).

On donne les valeurs approchées à 10^{-2} près suivantes :

$$f(0) \simeq 0,61 \quad f(1) \simeq 0.37 \quad \ln(e-1) \simeq 0,54$$

1. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [0,1]$
2. Ne pas faire cette question on admettra que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leqslant (\dfrac{e-1}{e+1})^n$.
3. En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel à préciser.