

Devoir Maison 01 - Eléments de Correction

Exercice 1

On considère les fonctions f et g définies sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = x + 1 + \frac{\ln(x)}{x} \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 + 1 - \ln(x)$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$, donc :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 = +\infty.}$$

Et, par produit de limites, $\lim_{x \rightarrow > 0} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow > 0} \ln(x) \times \frac{1}{x} = -\infty$, donc :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow > 0} f(x) = -\infty.}$$

- (b) Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe de f .

D'après la question précédente :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

donc la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$.

- (c) Montrer que $\mathcal{C}$ est au-dessus de $\mathcal{D}$ sur $[1, +\infty[$ et en dessous de $\mathcal{D}$ sur $]0, 1]$.

$$f(x) - (x + 1) = \frac{\ln(x)}{x} > 0 \text{ ssi } \ln(x) > 0 \text{ ssi } x > 1$$

Donc la courbe est au-dessus de son asymptote sur $]1, +\infty[$ et en dessous sur $]0, 1[$.

2. (a) Justifier que g est dérivable sur $]0; +\infty[$, puis calculer la dérivée de g . En déduire le sens de variation de g sur $]0, +\infty[$.

g est dérivable sur $]0, +\infty[$ par somme de fonctions usuelles (polynôme et logarithme) dérivables sur cet intervalle. On a alors :

$$\forall x > 0, \quad g'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x}.$$

Sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$g'(x) \geq 0 \text{ ssi } 2x^2 - 1 \geq 0 \text{ ssi } x^2 \geq \frac{1}{2} \text{ ssi } x \geq \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

On en déduit les variations de g sur $\mathbb{R}_+^*$:

x	0	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$+\infty$
$\frac{g'(x)}{g(x)}$	$\parallel$	$- \quad 0 \quad +$	$\parallel$
		$\searrow \quad \nearrow$	

- (b) Montrer que $g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\ln(2)$. En déduire que $g(x)$ est positif strictement sur $]0, +\infty[$.

Le minimum global de g sur $\mathbb{R}_+^*$ est :

$$g\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}}^2 + 1 - \ln\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\ln(2) > 0$$

car $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$ pour tout $a > 0$ et $\ln(\frac{1}{2}) = -\ln(2)$.

Le minimum de g sur $\mathbb{R}_+^*$ est strictement positif, donc :

$$\boxed{g \text{ est strictement positive sur } \mathbb{R}_+^*}.$$

- (c) Montrer que la dérivée de f vérifie pour tout réel x strictement positif :
- $$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par somme et quotient de fonctions usuelles dérivables sur cet intervalle, avec le dénominateur ne s'annulant pas. Il vient :

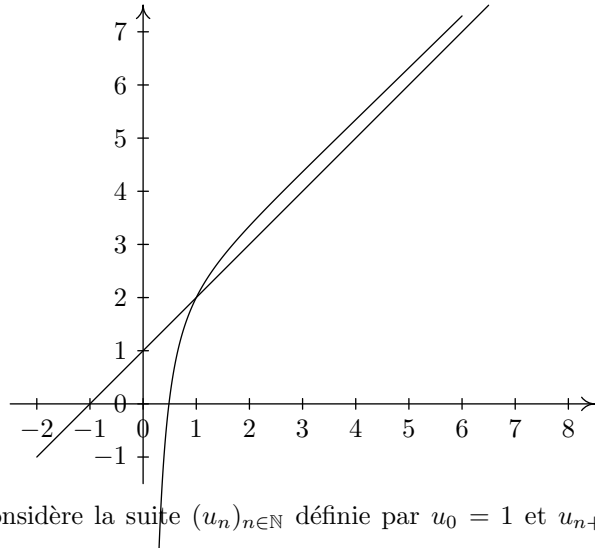
$$\forall x > 0, \quad f'(x) = 1 + \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x) \times 1}{x^2} = \frac{x^2 + 1 - \ln(x)}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

- (d) Déduire des questions précédentes le tableau des variations de f en y faisant figurer les limites trouvées en 1.a)

On a : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ pour tout $x > 0$ et $g(x) > 0$ pour tout $x > 0$, donc f' est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$		$-\infty \nearrow +\infty$

3. Tracer l'allure de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ dans un repère orthonormé d'unité 2cm.



On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n .

4. (a) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $u_n \geq n + 1$.

Procédons par récurrence :

- Pour $n = 0$: $u_0 = 1$ donc $u_0 \leq 0 + 1$.
- Supposons $u_n \geq n + 1$ pour un entier naturel $n \geq 0$ fixé, et montrons que $u_{n+1} \geq n + 2$.

Par hypothèse de récurrence, $u_n \geq n + 1 > 0$, et f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

u_n et $n + 1$ étant éléments de $\mathbb{R}_+^*$, il vient : $f(u_n) \geq f(n + 1)$.

Or, $f(u_n) = u_{n+1}$, et :

$$f(n + 1) = n + 2 + \frac{\ln(n + 1)}{n} \geq n + 2$$

$$\text{car } \frac{\ln(n + 1)}{n} \geq 0 \text{ puisque } n + 1 \geq 1.$$

On a donc établi : $u_{n+1} \geq n + 2$.

— D'après le principe de récurrence simple, l'inégalité est démontrée pour tout entier naturel n :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq n + 1.}$$

(b) Déterminer le sens de variation et la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= f(u_n) - u_n \\ &= u_n + 1 + \frac{\ln(u_n)}{u_n} - u_n \\ &= 1 + \frac{\ln(u_n)}{u_n} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

car $u_n \geq n + 1 \geq 1$ donc $\ln(u_n) \geq 0$ pour tout entier naturel n .

Donc la suite (u_n) est croissante.

Par ailleurs, en utilisant le théorème de minoration, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n + 1 = +\infty$ implique $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.}$

Exercice 2

Etude de la fonction f .

1. $f(x) = x + 2 - 2\ln(e^x + 1)$ pour tout x réel, $e^x > 0$, donc $e^x + 1 > 1$, donc $e^x + 1 > 0$, donc $\ln(e^x + 1)$ existe, donc $D_f = \mathbb{R}$.
2. Pour tout x réel,

$$\ln(e^{-x} + 1) = \ln \frac{1 + e^x}{e^x} = \ln(e^x + 1) - \ln(e^x) = \ln(e^x + 1) - x,$$

donc

$$-x + 2 - 2\ln(e^{-x} + 1) = -x + 2 - 2\ln(1 + e^x) + 2x = x + 2 - 2\ln(1 + e^x) = f(x).$$

pour tout x réel, on a : $f(x) = -x + 2 - 2\ln(e^{-x} + 1)$.

D_f est symétrique par rapport à 0, et pour tout x réel,

$$f(-x) = -x + 2 - 2\ln(e^{-x} + 1) = f(x)$$

d'après l'égalité montrée précédemment, donc : f est paire.

3. Quand $x \rightarrow +\infty$, $e^{-x} \rightarrow 0$, donc $e^x + 1 \rightarrow 1$, donc $\ln(e^{-x} + 1) \rightarrow 0$ } donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

4. $f(x) - (-x + 2) = -2 \ln(e^{-x} + 1)$, donc, d'après ce qui précède, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (-x + 2) = 0$, donc $D : y = -x + 2$ est asymptote à C en $+\infty$.

La position relative de C et de D est donnée par le signe de $f(x) - (-x + 2) = -2 \ln(e^{-x} + 1)$. Or (cf 1), pour tout x réel, $e^{-x} + 1 > 1$, donc $\ln(e^{-x} + 1) > 0$, donc $-2 \ln(e^{-x} + 1) < 0$, donc : Pour tout x réel, C est en dessous de D.

5. $f'(x) = 1 - 2 \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{1 - e^x}{e^x + 1}$ (en utilisant $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ avec $u(x) = e^x + 1$).
Comme $e^x + 1 > 0$ pour tout x , $f'(x)$ est du signe de $1 - e^x$.

$$1 - e^x > 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0;$$

d'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$2 - 2 \ln 2$	$\searrow$	$-\infty$

Remarques : Comme f paire, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$f(0) = 2 - 2 \ln(e^0 + 1) = 2 - 2 \ln 2, \text{ puisque } e^0 = 1$$

6.

$$f(x) = x \Leftrightarrow x + 2 - 2 \ln(e^x + 1) = x \Leftrightarrow \ln(e^x + 1) = 1 \Leftrightarrow e^x + 1 = e \Leftrightarrow e^x = e - 1 \Leftrightarrow x = \ln(e - 1),$$

donc L'équation $f(x) = x$ a une solution unique : $\alpha = \ln(e - 1)$.

7. $f'(x) = \frac{1 - e^x}{e^x + 1}$, donc $f''(x) = \frac{-e^x(e^x + 1) - (1 - e^x)e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x(-2)}{(e^x + 1)^2}$, soit :
 $f''(x) = -2 \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$.

8. Comme l'exponentielle est positive sur $\mathbb{R}$, pour tout x réel, $f''(x) < 0$, donc f' est décroissante sur $\mathbb{R}$, donc :

$$\forall x \in [0, 1], f'(1) \leq f'(x) \leq f'(0);$$

$$\text{or } f'(1) = \frac{1 - e}{e + 1} \text{ et } f'(0) = 0, \text{ donc } \forall x \in [0, 1], \frac{1 - e}{e + 1} \leq f'(x) \leq 0, \text{ donc}$$

$$\forall x \in [0, 1], |f'(x)| \leq \frac{e - 1}{e + 1}.$$

Convergence de la suite (u_n)

1. $u_0 = 0$, donc $u_0 \in [0, 1]$. La propriété est vraie pour $n = 0$

Soit n un entier quelconque de $\mathbb{N}$; on suppose que $u_n \in [0, 1]$; alors, comme f est décroissante dans $[0, 1]$, $f(u_n) \in [f(1), f(0)]$; De plus, $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(0) \approx 0,61$ et $f(1) \approx 0,37$, donc $[f(1), f(0)] \subset [0, 1]$, donc : $u_{n+1} \in [0, 1]$;
La propriété est héréditaire. Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1]$.

2. Utilisons la question 8 de la partie précédente : appliquons le théorème des accrois-

sements finis à f sur l'intervalle $[0, 1]$: Comme $\left. \begin{array}{l} \forall x \in [0, 1], |f'(x)| \leq \frac{e - 1}{e + 1} \\ \alpha \in [0, 1] \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1] \end{array} \right\}$, on

peut appliquer le théorème des accroissements finis :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{e - 1}{e + 1} |u_n - \alpha|;$$

et comme $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(\alpha) = \alpha$, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{e - 1}{e + 1} |u_n - \alpha|$.

On peut alors montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{e - 1}{e + 1}\right)^n$:

Pour $n = 0$, comme $u_0 \in [0, 1]$ et $\alpha \in [0, 1]$, $|u_0 - \alpha| \leq 1$; de plus $\left(\frac{e - 1}{e + 1}\right)^0 = 1$, donc l'inégalité est vraie au rang 0.

Soit n un entier naturel quelconque; on suppose que $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{e - 1}{e + 1}\right)^n$;

Alors $\frac{e - 1}{e + 1} |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{e - 1}{e + 1}\right)^{n+1}$; et comme $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{e - 1}{e + 1} |u_n - \alpha|$, on

obtient : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{e - 1}{e + 1}\right)^{n+1}$: l'inégalité est héréditaire. Donc : $\forall n \in$

$$\mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{e - 1}{e + 1}\right)^n.$$

Quand $n \rightarrow +\infty$, comme $-1 < \frac{e - 1}{e + 1} < 1$, $\left(\frac{e - 1}{e + 1}\right)^n \rightarrow 0$, donc, théorème des gendarmes, $|u_n - \alpha| \rightarrow 0$, et donc $u_n \rightarrow \alpha$. La suite (u_n) converge vers α .