

Devoir Maison 02 - Eléments de Correction

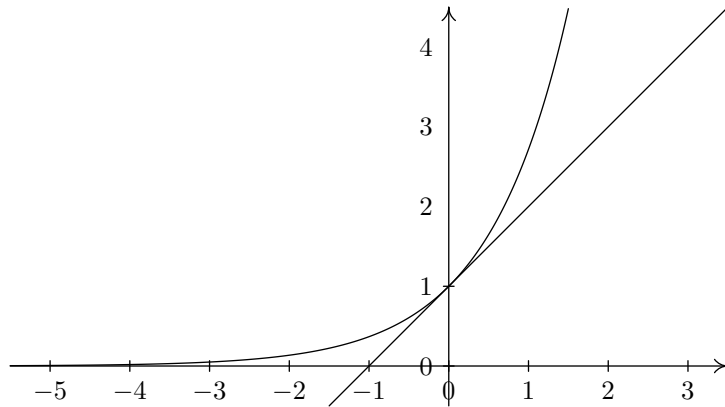
Exercice 1

$$f_n(x) = \frac{e^x - 1}{x} + n \ln x,$$

Partie A : Etude du cas particulier $n = 0$

f_0 est donc la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $f_0(x) = \frac{e^x - 1}{x}$.

1.



2. Résolution graphique d'une inéquation :

(a) Avec $f(x) = e^x$, $f(0) = 1$, $f'(x) = e^x$ et $f'(0) = 1$.

Une équation de la tangente au point d'abscisse 0 est :

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0), \text{ soit } y - 1 = x \text{ ou } y = x + 1.$$

On voit sur la figure que quel que soit le réel u , la courbe est au dessus de la tangente soit :

$$e^u \geq u + 1.$$

(b) En posant pour tout réel u , $x = -u$, l'inégalité précédente s'écrit :

$$e^{-x} \geq -x + 1 \Leftrightarrow e^{-x} + x - 1 \geq 0.$$

En multipliant chaque membre de l'inégalité précédente par e^x , on obtient :

$$1 + (x - 1)e^x \geq 0.$$

3. Limites :

(a) On a $f_0(x) = \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, donc par somme de limites

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_0(x) = +\infty.$$

(b) Avec la fonction $f(x) = e^x$, on a par définition $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} =$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = f'(0) = e^0 = 1. \text{ Donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

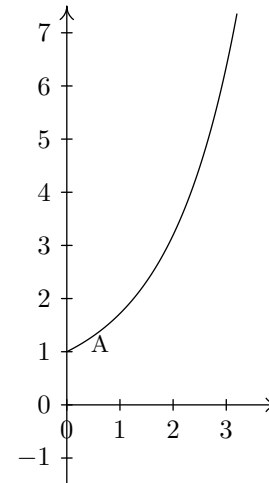
4. Sens de variations :

(a) La fonction f_0 quotients de fonctions dérivables sur $]0 ; +\infty[$, le dénominateur étant non nul est dérivable et sur cet intervalle :

$$f'_0(x) = \frac{xe^x - (e^x - 1)}{x^2} = \frac{e^x(x - 1) + 1}{x^2}.$$

(b) On a vu à la fin de la question précédente que $1 + (x - 1)e^x \geq 0$, donc $f'_0(x) \geq 0$ sur $]0 ; +\infty[$. La fonction f_0 est croissante de 1 à plus l'infini.

5.

**Partie B : Etude de la famille de fonctions f_n pour $n \geq 1$** 1. La fonction $f_n(x) = \frac{e^x - 1}{x} + n \ln x$ somme de quotient de fonctions dérivables le dénominateur ne s'annulant pas sur $]0 ; +\infty[$ est dérivable et sur cet intervalle :

$$f'_n(x) = \frac{xe^x - (e^x - 1)}{x^2} + \frac{n}{x} = \frac{e^x(x - 1) + 1 + nx}{x^2}.$$

Or on a vu que $e^x(x - 1) + 1 \geq 0$, donc comme $nx > 0$, $e^x(x - 1) + 1 + nx > 0$: donc $f'_n(x) > 0$: les fonctions f_n sont croissantes sur $]0 ; +\infty[$.

2. • On a vu que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} n \ln x = +\infty$, d'où par somme de limites :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty.$$

• On a vu que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ et on a $\lim_{x \rightarrow 0} n \ln x = -\infty$, d'où par somme de limites : $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = -\infty$.

Le dernier résultat montre que géométriquement l'axe des ordonnées est asymptote verticale à $\mathcal{C}_n$ au voisinage de zéro.

$$3. \text{ Soit } d_n(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{e^x - 1}{x} + (n+1) \ln x - \left(\frac{e^x - 1}{x} + n \ln x \right) = \ln x.$$

Or on sait que la fonction $\ln$ est négative entre 0 et 1, s'annule en 1 et est positive sur $]1; +\infty[$. Donc :

- Sur $]0; 1[$ $\mathcal{C}_{n+1}$ est au dessous de $\mathcal{C}_n$;
- Sur $]1; +\infty[$ $\mathcal{C}_{n+1}$ est au dessus de $\mathcal{C}_n$;
- Toutes les courbes $\mathcal{C}_n$ contiennent le point de coordonnées $(1; e - 1)$.

4. On a vu à la question précédente que $d_n(x) = n \ln x$, donc $d_n(1) = 0$: toutes les courbes $\mathcal{C}_n$ contiennent donc le point $B(1; e - 1)$.

$$5. (a) \text{ On a } f_1(x) = \frac{e^x - 1}{x} + \ln x.$$

On a vu que les fonctions f_n sont strictement croissantes de moins l'infini à plus l'infini ; comme elles sont continues car dérivables sur $]0; +\infty[$, il existe donc un réel unique $\alpha_1 \in]0; +\infty[$ tel que $f_1(\alpha_1) = 0$.

On a $f_1(1) = e - 1 > 0$, donc $\alpha_1 \in]0; 1[$;

$$f(0,2) = \frac{e^{0,2} - 1}{0,2} + \ln 0,2 \approx -0,502 \text{ et}$$

$$f(0,9) = \frac{e^{0,9} - 1}{0,9} + \ln 0,9 \approx 7,2, \text{ donc } \alpha_1 \in]0,2; 0,9[.$$

(b) On a vu à la question 3 que sur $[0; 1[$, $\mathcal{C}_{n+1}$ est au dessous de $\mathcal{C}_n$, donc en particulier que $\mathcal{C}_2$ est au dessous de $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_3$ est au dessous de $\mathcal{C}_2$, ... et donc que pour $n > 1$, $\mathcal{C}_n$ est au dessous de $\mathcal{C}_1$, donc en particulier que pour tout $n > 1$, $f_n(\alpha_1) < f_1(\alpha_1)$.

Or $f_1(\alpha_1) = 0$, donc $f_n(\alpha_1) < 0$ pour tout $n > 1$.

(c) Quel que soit $n > 1$, on vient de voir que $f_n(\alpha_1) < 0$ et on sait que $f_n(1) > 0$; la fonction f_n étant continue car dérivable s'annule donc pour une unique valeur α_n de $]\alpha_1; 1[$.

6. (a) On a vu dans la partie A que la fonction f_0 est strictement croissante en particulier sur l'intervalle $[0; 1[$, donc

$$0 < x < 1 \Rightarrow 1 < \frac{e^x - 1}{x} < e - 1.$$

(b) Par définition α_n annule la fonction f_n , soit :

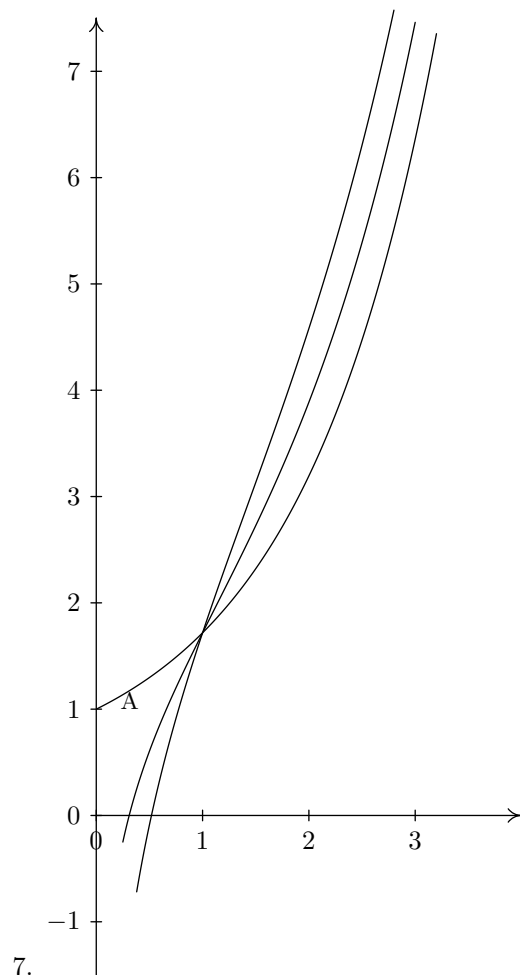
$$\frac{e^{\alpha_n} - 1}{\alpha_n} + n \ln \alpha_n = 0.$$

On a vu au 6. a que si $x \in]0; 1[$, alors $\frac{e^x - 1}{x} < e - 1$ donc en particulier pour α_n , $\frac{e^{\alpha_n} - 1}{\alpha_n} < e - 1 \Rightarrow \frac{e^{\alpha_n} - 1}{\alpha_n} + n \ln \alpha_n < e - 1 + n \ln \alpha_n$ ou encore $0 < e - 1 + n \ln \alpha_n \Leftrightarrow n \ln \alpha_n > 1 - e \Leftrightarrow \ln \alpha_n > \frac{1 - e}{n}$.

La fonction exponentielle étant croissante, on a :

$$\ln \alpha_n > \frac{1 - e}{n} \Rightarrow e^{\ln \alpha_n} > e^{\frac{1 - e}{n}} \text{ ou encore } \alpha_n > e^{\frac{1 - e}{n}}.$$

(c) On a donc $e^{\frac{1 - e}{n}} < \alpha_n < 1$; or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - e}{n} = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1 - e}{n}} = 1$, donc d'après le théorème des « gendarmes », $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 1$.



Partie C : Etude d'une suite d'intégrales

$$I_n = \int_1^{\frac{3}{2}} f_n(x) \, dx.$$

1. On a vu que sur $[1 ; +\infty[$, $f_n(x) \geq 0$, donc I_n est l'aire (en unité d'aire) de la surface limitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_n$ et les droites verticales d'équation $x = 1$ et $x = \frac{3}{2}$.

2. $I_{n+1} - I_n = \int_1^{\frac{3}{2}} f_{n+1}(x) \, dx - \int_1^{\frac{3}{2}} f_n(x) \, dx$ et par linéarité de l'intégrale :

$$I_{n+1} - I_n = \int_1^{\frac{3}{2}} [f_{n+1}(x) - f_n(x)] \, dx.$$

Or on a vu que pour $x \geq 1$, $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$, d'où $f_{n+1}(x) - f_n(x) \geq 0$, donc $I_{n+1} - I_n$ est l'intégrale d'une fonction positive ; sur l'intervalle $[1 ; \frac{3}{2}]$, cette intégrale est positive et par conséquent la suite (I_n) est croissante.

3. D'après la question précédente l'aire comprise entre les courbes $\mathcal{C}_{n+1}$ et $\mathcal{C}_n$ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \frac{3}{2}$ est, en unité d'aire, l'intégrale

$$\int_1^{\frac{3}{2}} [f_{n+1}(x) - f_n(x)] \, dx = \int_1^{\frac{3}{2}} \ln x \, dx.$$

L'unité d'aire est égale à $2 \times 2 = 4 \text{ cm}^2$, donc l'aire cherchée est égale à

$$4 \int_1^{\frac{3}{2}} \ln x \, dx \text{ aire indépendante de } n \text{ et donc constante.}$$

Rem. On trouve par une intégration par parties qu'une primitive de la fonction $x \mapsto \ln x$ est la fonction $x \mapsto x \ln x - x$.

L'aire cherchée est donc :

$$\begin{aligned} \int_1^{\frac{3}{2}} 4 \ln x \, dx &= 4[x \ln x - x]_1^{\frac{3}{2}} = 4 \left[\frac{3}{2} \ln \frac{3}{2} - \frac{3}{2} - (1 \ln 1 - 1) \right] = \\ 4 \left[\frac{3}{2} \ln \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \right] &= \\ 6 \ln \frac{3}{2} - 2 &\approx 0,433 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

On a obombré cette surface dans la figure au dessus, aire entre $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.