

Chapitre 29

Espaces affines

29.1 Définitions

29.1.1 Définition d'espace affine

$\mathcal{E}$ est un espace affine de direction E si et seulement

E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et

il existe une application $\varphi \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E} \times E \rightarrow \mathcal{E} \\ (M, \vec{u}) \mapsto \varphi(M, \vec{u}) \end{array} \right.$ qui vérifie

- (1) $\forall M \in \mathcal{E}, \forall \vec{u}, \vec{v} \in E, \varphi(\varphi(M, \vec{u}), \vec{v}) = \varphi(M, \vec{u} + \vec{v})$
- (2) $\forall M \in \mathcal{E}, \vec{u} \mapsto \varphi(M, \vec{u})$ est une bijection de E vers $\mathcal{E}$.

Les éléments de $\mathcal{E}$ sont appelés des points.

Si E est normé, alors $\mathcal{E}$ est muni de la distance associée.

Elle est définie par $d(M, N) = \left\| \overrightarrow{MN} \right\|$

La dimension de l'espace affine est la dimension de sa direction.

Notations

qui permettent de ne plus utiliser φ

- (1) permet de noter φ additivement : $\varphi(M, \vec{u}) = M + \vec{u}$

puisque $(M + \vec{u}) + \vec{v} = M + (\vec{u} + \vec{v})$

pseudo **associativité**

- (2) montre : $\forall M, N \in \mathcal{E}, \exists! \vec{u} \in E \quad M + \vec{u} = N$

On note $\vec{u} = \overrightarrow{MN}$

Ainsi : $M + \overrightarrow{MN} = N$

Premières propriétés :

- (1) devient la "**relation de Chasles**" $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$ (voir ¹)

- (2) montre que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} = \vec{0} &\Leftrightarrow M = N \\ \overrightarrow{MN} &= -\overrightarrow{NM} \end{aligned}$$

Test 730

L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation différentielle
 $(\Delta) : y' + y = x$ est un espace affine. Déterminez-le.
 (ceci est vrai pour toutes équations différentielles linéaire.)

1. Ou encore, avec la deuxième notation : $N - M + P - N = P - M$

29.1.2 Translations

Soit $\vec{u}$ un vecteur donné du $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .

La translation de vecteur $\vec{u}$ est l'application $t_{\vec{u}} : \begin{cases} \mathcal{E} & \rightarrow & \mathcal{E} \\ M & \mapsto & \vec{M} + \vec{u} \end{cases}$

Propriétés :

- $t_{\vec{u}}$ est une bijection de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{E}$
- $(t_{\vec{u}})^{-1} = t_{-\vec{u}}$
- $\forall \vec{u}, \vec{v} \in E, \quad t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{u}+\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}$
- $t_{\vec{0}} = \text{Id}_{\mathcal{E}}$

- Ainsi, muni de la loi $\circ$:

$$\mathcal{T} = \left\{ t_{\vec{u}} \mid \vec{u} \in E \right\} \text{ est un groupe abélien}$$

- De plus : $\forall M, N \in \mathcal{E}, \quad \exists! \vec{u} \in E, \quad M = t_{\vec{u}}(N)$

29.1.3 Repère affine cartésien

En particulier, si $O \in \mathcal{A}$, espace affine de direction A , et si $\mathcal{B}$ est une base de A , alors tout point $M \in \mathcal{A}$ est caractérisé par les coordonnées de $\vec{OM}$ relativement à $\mathcal{B}$.

On dit que $(O, \mathcal{B})$ est un repère affine cartésien de $\mathcal{A}$.

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E .

Un repère² affine cartésien de $\mathcal{E}$ est un couple $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$

où O est un point quelconque de $\mathcal{E}$ appelé origine du repère

$\mathcal{B}$ est une base de E

Les coordonnées d'un point $M \in \mathcal{E}$

sont les coordonnées relativement à $\mathcal{B}$ du vecteur $\vec{OM}$.

Test 731

$ABCD$ est un parallélogramme non aplati de $\mathcal{E}$ ($\vec{AB} = \vec{DC}$ et $(\vec{AB}, \vec{AD})$ est libre).

Quelles sont les coordonnées de C :

- (1) dans le repère $(A, \vec{AB}, \vec{AD})$?
- (2) dans le repère $(B, \vec{AC}, \vec{BD})$ (justifier que c'est un repère)

Un changement de repère consiste à

- changer l'origine
- changer la base
- changer l'origine et la base

Test 732

Soit $A \in \mathcal{E}$ de coordonnées $(1, 2)$ relativement au repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

Les coordonnées d'un point M sont (x, y) relativement à $\mathcal{R}$ et (x', y') relativement à $\mathcal{R}' = (A, \vec{i}, \vec{i} - \vec{j})$. Donner les formules qui lient (x, y) et (x', y') (dans les deux sens)

2. Ne pas confondre "base" et "repère"

29.2 Sous-espaces affines

29.2.1 Sous-espace affine

$\mathcal{E}$ est un espace affine de direction E .

$\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$ est un sous-espace affine³ de $\mathcal{E}$ si et seulement si

$$\exists a_0 \in \mathcal{A}, A = \left\{ \overrightarrow{a_0 a} \mid a \in \mathcal{A} \right\} \text{ est un SEV de } E$$

Alors

- a appartient à $\mathcal{A}$ ssi a est de la forme $a = a_0 + \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u} \in A$
- On note $\boxed{\mathcal{A} = a_0 + A}$
- $\mathcal{A}$ est un espace affine de direction A

Test 733

Déterminer l'équation du plan affine $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^3$ passant par $A(1, 1, 1)$ et dirigé par $\text{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ avec $\overrightarrow{u}(1, 2, 0)$ et $\overrightarrow{v}(2, 0, 1)$.

Th. $\triangleright$ Indépendance du choix de l'origine

Si $\mathcal{A} = a_0 + A$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$, alors

$$\forall a_1 \in \mathcal{A}, \mathcal{A} = a_1 + A$$

Pour montrer que $\mathcal{A}$ est un sous-espace affine, on peut donc utiliser n'importe quel point de $\mathcal{A}$.

Test 734

Réciproquement, a-t-on $a + A = b + A \Rightarrow b \in a + A$?

Test 735

A et B sont deux SEV de E , et a et b deux points de $\mathcal{E}$.

$$\text{Montrer} \quad a + A = b + B \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ \overrightarrow{ab} \in A \end{cases}$$

29.2.2 Sous-espace affine d'un espace vectoriel

E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

$\mathcal{A} \subset E$ est un sous-espace affine de E si et seulement si

il existe un élément $a_0 \in \mathcal{A}$ tel que $A = \left\{ \overrightarrow{a_0 a} \mid a \in \mathcal{A} \right\}$ est un SEV de E .

- Les éléments d'un sous-espace affine sont appelés des points
- A est appelé la direction de $\mathcal{A}$
- a appartient à $\mathcal{A}$ ssi a est de la forme $a = a_0 + \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u} \in A$

Important:

On note $\mathcal{A} = a_0 + A = \left\{ \overrightarrow{a_0 a} \mid a \in \mathcal{A} \right\}$ le sous-espace affine passant par a_0 et de direction le SEV A .



Test 736

Résoudre l'équation différentielle $y'' + 3y' + 5y = 2x + 3$
Est-ce un sous-espace affine d'un espace vectoriel ? Si oui, identifiez-les.

3. On dit aussi que $\mathcal{A}$ est une variété linéaire affine de $\mathcal{E}$.

Cas particulier important E est un sous-espace affine de direction E

- Tout élément de $u \in E$ peut donc être considéré comme
 - un élément de E en tant qu'espace vectoriel. On dira "le vecteur u ".
 - un élément de E en tant qu'espace affine. On dira "le point u ".

29.2.3 Intersection et parallélisme

Th. ▷ Intersection de sous-espaces affines

Si elle n'est pas vide, l'intersection de deux sous-espaces affines est un sous-espace affine de direction l'intersection des directions.

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{A} = a + A \\ \mathcal{B} = b + B \\ c \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathcal{A} \cap \mathcal{B} = c + (A \cap B)$$

$\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux sous-espaces affines de directions respectives A et B .

$\mathcal{A}$ est parallèle à $\mathcal{B}$ si et seulement si $A \subset B$

$\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont parallèles si et seulement si $A = B$

Th. ▷ Intersection et parallélisme

- Si $\mathcal{A}$ est parallèle à $\mathcal{B}$ alors $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$ ou $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$
- Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont parallèles, alors $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$ ou $\mathcal{A} = \mathcal{B}$

Attention aux réciproques :

- $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$ est parallèle à $\mathcal{B}$
- $\mathcal{A} = \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont parallèles
- **mais** $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$ n'entraîne pas forcément un parallélisme



Test 737

Montrer que $\mathcal{A} = a + A$ et $\mathcal{B} = b + B$ ont une intersection non vide si et seulement si $\overrightarrow{ab} \in A + B$

29.2.4 Définition d'hyperplan affine

Rappel : la dimension d'un espace affine est la dimension de sa direction.

$\mathcal{E}$ est un espace affine de direction E .

Le sous-espace affine $\mathcal{H} = a + H$ est un hyperplan affine de $\mathcal{E}$ ssi sa direction H est un hyperplan vectoriel de E .

▷ Comme un espace affine est de dimension finie, un hyperplan affine est un sous-espace de dimension $\dim E - 1$.

29.2.5 Equation normale d'un hyperplan affine

Th. ▷ Equation normale

Soient $\mathcal{H}$ un hyperplan affine de $\mathcal{E}$ affine euclidien, $a \in \mathcal{E}$ et $\vec{u}$ un vecteur non nul de la droite vectorielle $H^\perp$. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\mathcal{H} = \{m \in \mathcal{E} \mid \overrightarrow{am} \cdot \vec{u} = \lambda\}$$

Ainsi $m \in \mathcal{H} \iff \overrightarrow{am} \cdot \vec{u} = \lambda$: on parle d'équation normale de $\mathcal{H}$.

Équation cartésienne : dans un repère $\mathcal{R} = (O, e_1, \dots, e_n)$ de E :

- $\mathcal{H}$ est un hyperplan ssi son équation cartésienne est de la forme

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = \alpha, \quad (a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$$

$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$ est l'équation de sa direction.

- Les hyperplans d'équations $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = \alpha$ et $b_1x_1 + \dots + b_nx_n = \beta$ sont :
 - parallèles ssi $(a_1, \dots, a_n)$ et $(b_1, \dots, b_n)$ sont proportionnels
 - égaux ssi $(a_1, \dots, a_n, \alpha)$ et $(b_1, \dots, b_n, \beta)$ sont proportionnels

Test 738

Le plan affine est rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Les points A, B et C ont pour coordonnées $(1, 0)$, $(2, -1)$ et $(3, 2)$.
Équation de la droite AB ? de la parallèle à AB contenant C ?

Test 739

L'espace affine est rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les points A, B et C ont pour coordonnées $(1, 1, 0)$, $(0, 2, -1)$ et $(1, 3, 2)$.
Équation du plan ABC ? du plan parallèle, contenant $D(1, 1, 1)$?

29.3 Applications aux Équations linéaires

Équation linéaire (cas général) :

- c'est une équation de la forme $f(x) = b$ où $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $b \in F$
- si $\mathcal{S} = \left\{ u \in E \mid f(u) = b \right\}$ désigne l'ensemble des solutions :
 - soit $\mathcal{S} = \emptyset$ (si $b \notin \text{Im}(f)$)
 - soit $\mathcal{S} \neq \emptyset$. Alors $\mathcal{S}$ est un sous-espace affine de E de direction $\text{Ker}(f)$
$$\mathcal{S} = x_0 + \text{Ker}(f) \quad \text{où} \quad x_0 \in \mathcal{S} \text{ est une solution particulière.}$$

Test 740

Trouver la solutions u_0 de la forme $(x, 0)$ du système
$$\begin{cases} 4x + 6y = 2 \\ 6x + 9y = 3 \end{cases}$$

Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $\varphi(x, y) = (4x + 6y, 6x + 9y)$
En déduire toutes les solutions du système.

Équation différentielle linéaire

- C'est une équation différentielle de la forme $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = b(x)$ où $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ et b sont des fonctions continues sur l'intervalle I .
- Cette équation entre dans le cadre général des équations linéaires ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) :

$$\varphi(y) = b \quad \text{où} \quad \varphi : \begin{cases} \mathcal{D}^n(I, \mathbb{K}) & \rightarrow & \mathcal{F}(I, \mathbb{K}) \\ y & \mapsto & y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y \end{cases}$$

- Voir le cours d'analyse pour les équations linéaires, soit d'ordre 1, soit d'ordre 2 à coefficients constants

Test 741 Résoudre $xy' + 2(x-1)y = 2(x+1)x^4$. Sur quels intervalles peut-on la résoudre ?

Suites récurrentes (u_n) telles que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$

$\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des suites à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$.

- Les suites u recherchées sont les solutions de l'équation linéaire :

$$\varphi(u) = 0 \quad \text{où} \quad \varphi \begin{cases} \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \rightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ (u_n) & \mapsto (v_n) \end{cases}$$

avec $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{n+2} - a u_{n+1} - b u_n$

Test 742 On pose les deux suites (u) et (v) telles que $u_0 = 0$ et $v_0 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 4u_n + 2v_n$ et $v_{n+1} = v_n - u_n$. Déterminer les termes généraux des deux suites.

Interpolation polynomiale

Soient $x_0, \dots, x_n$ dans $\mathbb{K}$ distincts et $(y_0, \dots, y_n)$ dans $\mathbb{K}$.

L'ensemble des polynômes P tels que $P(x_i) = y_i$ pour tout i de $\llbracket 0; n \rrbracket$ est un sous-espace affine de $\mathbb{K}[X]$. Plus précisément si P est un polynôme vérifiant la condition précédente (son existence est garantie), alors $\mathcal{P} = P + A\mathbb{K}[X]$ où $A = \prod_{i=0}^n (X - x_i)$.

Test 743 Déterminer l'ensemble des polynômes P tels que $P(1)=P(2)=P(3)=2$

29.4 Exercices

Repères affines

Exercice 1

Soient A, B, C trois points non alignés d'un plan affine. Déterminer l'ensemble des points ayant mêmes coordonnées dans les repères $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et $(B, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$.

Exercice 2

Soit $R_1 = (O, e_1, e_2, e_3)$ un repère cartésien d'un espace affine. Soient O' de coordonnées $(1, 0, 0)$, $e'_1 = e_1 + e_2$, $e'_2 = e_1 - e_2$, $e'_3 = e_3$ et $R_2 = (O', e'_1, e'_2, e'_3)$. Déterminer les coordonnées d'un point dans R_2 en fonction de ses coordonnées dans R_1 .

Sous-espace affines

Exercice 3

Soient $\mathcal{F}, \mathcal{G}$, deux sous-espaces affines de dimension finie d'un espace affine $\mathcal{E}$. On note $\mathcal{H}$ le sous-espace affine engendré par $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ c'est-à-dire le plus petit sous-espace affine contenant $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$. Déterminer $\dim(\mathcal{H})$.

Exercice 4

Montrer que l'ensemble

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a+2-b & 2a+3b-5 \\ 4+a & 1-a+b \end{pmatrix} / a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

est un sous-espace affine de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Préciser sa direction.

Exercice 5

Soit $\mathcal{F}$ une partie non vide de l'espace affine $\mathcal{A}$. Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous espace affine de $\mathcal{A}$ si et seulement si

$$(\forall x, y \in \mathcal{F}) (x \neq y \Rightarrow D_{x,y} \subset \mathcal{F})$$

où $D_{x,y}$ est la droite qui joint x et y .

Calculs de distances

Exercice 6

Soient les droites $\mathcal{D} \begin{cases} y - z + 2 = 0 \\ 2x - 3y + 2z = 3 \end{cases}$ et $\mathcal{D}' \begin{cases} x - z + 1 = 0 \\ x - 2y + 2z = 11 \end{cases}$. Déterminer la perpendiculaire commune à ces droites. En déduire la distance entre ces deux droites.

Exercice 7

Calculer la distance du point $O = (0, 0, 0)$ au plan $(\mathcal{P})$ d'équation $x + y + z = 1$. Déterminer λ pour que le plan $(x + y + z - 1) + \lambda(x - y + z - 2) = 0$ soit orthogonal au plan $(\mathcal{P})$. Calculer la distance du point O au plan $(\mathcal{P}_\lambda)$. En déduire la distance de O à la droite $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$.

