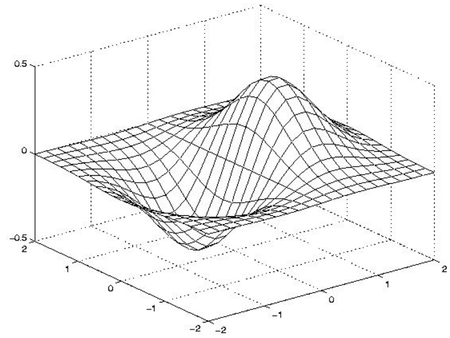
Chapitre 25

Fonctions de deux variables



Les fonctions considérées ici sont définies sur une partie $E \subset \mathbb{R}^2$ définie par des conditions simples.
$\mathbb{R}^2$ est muni de la norme euclidienne usuelle (notée $\left\|.\right\|$).
Ce chapitre se généralise aisément aux fonctions de 3 variables.

25.1 Parties ouvertes de $\mathbb{R}^2$

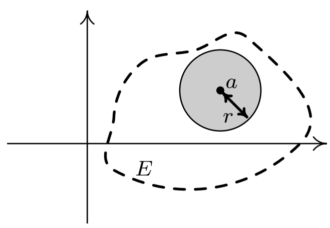
Les opérations sur les ouverts, ainsi que les notions de partie fermée, de voisinage, d'intérieur et d'adhérence d'une partie sont hors programme.

En notant a un élément de $\mathbb{R}^2$, on sous-entend que $a = (a_1, a_2)$ avec a_1 et a_2 des réels.
On rappelle que $\mathbb{R}^2$ possède une structure de $\mathbb{R}-$ev sur lequel on définit une **norme euclidienne** par :

$$\left\|a\right\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Une **boule ouverte** de centre $a \in \mathbb{R}^2$, de rayon $r > 0$
est l'ensemble $\mathcal{B}(a, r) = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \left\|x - a\right\| < r\right\}$

Une **partie ouverte** de $\mathbb{R}^2$ est un sous-ensemble E de $\mathbb{R}^2$
qui vérifie $\forall\, a \in E,\ \exists\, r > 0 \quad \mathcal{B}(a, r) \subset E$
(On dit que E est un **voisinage** de chacun de ses points.)



Test 656	Montrer qu'une boule ouverte est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$. Montrer que le complémentaire de la boule fermée $\left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \left\|x - a\right\| \leqslant r\right\}$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

Test 657	Montrer que, si E et F sont deux parties ouvertes de $\mathbb{R}^2$, il en est de même pour $E \cup F$ et $E \cap F$.

25.2 Limites, continuité

25.2.1 Fonctions de deux variables

Une fonction réelle de deux variables réelles est

$$\text{une application} \quad f : E \to \mathbb{R} \quad \text{où} \quad E \subset \mathbb{R}^2$$

Muni des opérations usuelles $(+\,,\ \cdot\,,\ \times)$

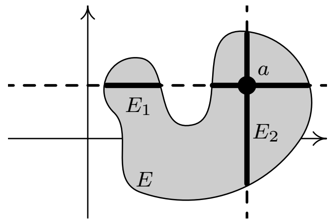
$$\mathcal{F}(E,\mathbb{R}) \ \text{ est une algèbre commutative non intègre.}$$

A tout point $a = (a_1, a_2) \in E$, on associe les "traces sur E" des droites d'équations $x = a_1$ et $y = a_2$.

Ce sont les ensembles

$$E_1 = \Big\{ x \in \mathbb{R} \ \mid \ (x, a_2) \in E \Big\}$$

$$E_2 = \Big\{ y \in \mathbb{R} \ \mid \ (a_1, y) \in E \Big\}$$



Les **applications partielles** [1] associées à $f \in \mathcal{F}(E,\mathbb{R})$ au point $a = (a_1, a_2) \in E$

sont les applications $\quad f(\cdot, a_2) \begin{cases} E_1 \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto & f(x, a_2) \end{cases}$

$$f(a_1, \cdot) \begin{cases} E_2 \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto & f(a_1, x) \end{cases}$$

Test 658 Déterminer les ensembles de définitions, puis les applications partielles en $(0,0)$ de $f : (x,y) \mapsto x\,y$ et $g : (x,y) \mapsto \sin(x)\,\ln(1 + x + y^2)$

25.2.2 Limites

La notion de "limite en a" n'a de sens que si E contient des points arbitrairement proches de a, c'est-à-dire quand $\quad \forall\, \varepsilon > 0\,,\ \exists\, x \in E - \{a\} \quad \Big\| x - a \Big\| < \varepsilon$.

*Désormais, on supposera f définie sur un ensemble E qui vérifie cette condition, généralement **un ouvert contenant** a*

$f \in \mathcal{F}(E,\mathbb{R})$ admet une **limite finie** ℓ en a ssi

$$\forall\, \varepsilon > 0\,,\ \exists\, \eta > 0\,,\ \forall\, x \in E\,,\ \Big\| x - a \Big\| < \eta \ \Rightarrow\ |f(x) - \ell\,| < \varepsilon$$

On note $\boxed{\lim_a f = \ell}$ ou $\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = \ell}$

$f \in \mathcal{F}(E,\mathbb{R})$ admet **$+\infty$ pour limite** en a ssi

$$\forall\, A \in \mathbb{R}\,,\ \exists\, \eta > 0\,,\ \forall\, x \in E\,,\ \Big\| x - a \Big\| < \eta \ \Rightarrow\ f(x) > A$$

On note $\boxed{\lim_a f = +\infty}$ ou $\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = +\infty}$

$f \in \mathcal{F}(E,\mathbb{R})$ admet **$-\infty$ pour limite** en a ssi

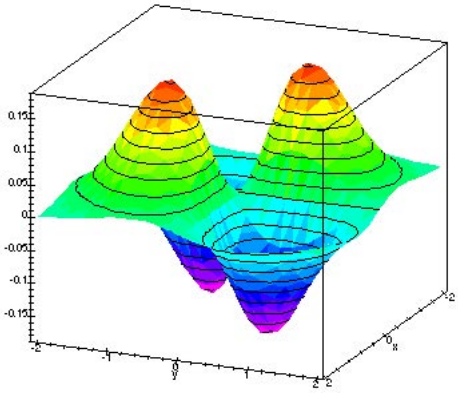
$$\forall\, A \in \mathbb{R}\,,\ \exists\, \eta > 0\,,\ \forall\, x \in E\,,\ \Big\| x - a \Big\| < \eta \ \Rightarrow\ f(x) < A$$

On note $\boxed{\lim_a f = -\infty}$ ou $\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = -\infty}$

1. On dit aussi " **fonctions partielles** "

Remarques : comme pour les fonctions d'une variable

- on peut utiliser des inégalités larges $\left\|x-a\right\| \leqslant \eta$ et/ou $|f(x)-\ell\,| \leqslant \varepsilon$, etc.
- Quand elle existe, la limite est unique
- Les résultats sur les limites restent valables (opérations, ordre, ect.)
- Il en est de même pour la "limite séquentielle".



Un outil

$$\boxed{\max\Big(|x|,|y|\Big) \leqslant \Big\|(x,y)\Big\| \leqslant \sqrt{2}\,\max\Big(|x|,|y|\Big)}$$

Ceci permet de traiter séparément x et y :

$$\Big\|(x,y)\Big\| < \eta \Rightarrow \Big(|x| < \eta \text{ et } |y| < \eta\Big)$$

$$\left(|x| < \frac{\eta}{\sqrt{2}} \text{ et } |y| < \frac{\eta}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow \Big\|(x,y)\Big\| < \eta$$

ce qui revient à utiliser la norme $\Big\|(x,y)\Big\|_\infty = \max|x|,|y|\ )$

Test 659 Trouver, si elle existe, la limite en $(0,0)$ de $(x,y) \mapsto x \sin\dfrac{y}{x}$.

Th. ▷ **Limite et applications partielles**

Si $f \in \mathcal{F}(E,\mathbb{R})$ admet une limite ℓ en $a=(a_1,a_2) \in \overline{E}$ (limite finie ou infinie) alors les fonctions partielles admettent la même limite en a_1 et a_2 .

$$\lim_{(a_1,a_2)} f = \ell \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{a_1} f(\cdot,a_2) = \ell \\ \lim\limits_{a_2} f(a_1,\cdot) = \ell \end{cases}$$

Attention : la réciproque est fausse.

Remarques :

- Ceci permet souvent de déterminer la valeur de la limite de f en a (si cette limite existe)
- **La réciproque est fausse** : $f(x,y) = \dfrac{x\,y}{x^2+y^2}$ *et* $a=(0,0)$:
  - Les deux fonctions partielles en $(0,0)$ ont la même limite $\ell = 0$
  - Pourtant, f n'a pas de limite en $(0,0)$.

    En effet : $f(x,x) = \dfrac{1}{2}$ ne tend pas vers 0 quand $x \to 0$.

Test 660

1. Rappeler les formules trigonométriques de sommes en produits.
2. Soit $f : (x,y) \mapsto \dfrac{\sin x + \sin y}{x+y}$. Déterminer son ensemble de définition.
3. Déterminer la limite en 0 de chacune des applications partielles de f.
4. Montrer que cette limite commune est celle de f en $(0,0)$.

25.2.3 Continuité

f est **continue en $a \in E$** ssi $\lim\limits_{a} f = f(a)$.

f est **continue sur E** ssi f est continue en tout point $a \in E$

On note $\boxed{f \in \mathcal{C}(E, \mathbb{R})}$ ou $\boxed{f \in \mathcal{C}^0(E, \mathbb{R})}$

Les résultats sur les limites finies montrent que :
- les résultats sur la continuité restent valables (somme, produit, quotient, etc.)
- muni des opérations usuelles :
  - $\left\{ f \in \mathcal{F}(E, \mathbb{R}) \mid f \text{ continue en } a \right\}$ a une structure d'algèbre commutative.
  - $\mathcal{C}(E, \mathbb{R})$ a une structure d'algèbre commutative (non intègre).
- Composition :
  - $E \subset \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} I \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$ et $a \in E$

$$\left.\begin{array}{r} f \text{ continue en } a \\ \varphi \text{ continue en } f(a) \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi \circ f \text{ continue en } a$$

  - $\varphi_1 : I \to E_1$, $\varphi_2 : I \to E_2$, $f : E_1 \times E_2 \to \mathbb{R}$ et $t_0 \in I$

$$\left.\begin{array}{r} \varphi_1 \text{ et } \varphi_2 \text{ continues en } t_0 \\ f \text{ continue en } \Big(\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0)\Big) \end{array}\right\} \Rightarrow t \mapsto f\Big(\varphi_1(t), \varphi_2(t)\Big) \text{ continue en } t_0$$

- Si f est continue en $a = (a_1, a_2)$ alors les applications partielles en a sont continues en a_1 et a_2 (sous réserve qu'elles soient localement définies [2]).

Attention : la réciproque est fausse.

Th. ▷ **Continuité des projections canoniques**

Les applications $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

Ce sont les **projections canoniques**

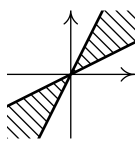
Intérêt

Ceci permet d'établir rapidement la continuité de la plupart des fonctions.

Test 661 Justifier que les fonctions suivantes sont continues sur leur ensemble de définition : $f : (x, y) \mapsto x + y \qquad g : (x, y) \mapsto x \sin(y) + \ln(x + y^2)$

Test 662 Ensemble de continuité de $f : (x, y) \mapsto x \sin \dfrac{y}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0, y) = 0$.

2. **Exemple** :
en $(0, 0)$, la fonction $f : (x, y) \mapsto \sqrt{(y - 2x)(x - 2y)}$ est continue,
mais les fonctions partielles en ce point ne sont définies qu'en $\{0\}$.



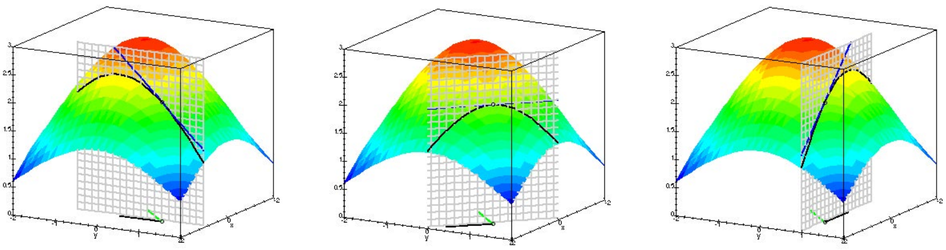
25.3 Dérivées partielles

25.3.1 Dérivées selon un vecteur

$f \in \mathcal{F}(E, \mathbb{R})$ où E est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. u est un vecteur de $\mathbb{R}^2$

La **dérivée en a suivant le vecteur u** notée $\boxed{D_u f(a)}$

est, si elle existe, la dérivée en 0 de $\varphi_u : t \mapsto f(a + t\,u)$.



Remarques

- Si $u = 0$, φ_0 est constante et définie sur $\mathbb{R}$.
- Si $u \neq 0$, E étant un ouvert, il existe une boule ouverte $\mathcal{B}(a, r)$ incluse dans E. La fonction φ_u est au moins définie sur $\left]-\frac{r}{||u||}, \frac{r}{||u||}\right[$
- Si elle existe : $D_u f(a) = \varphi_u'(0) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(a + t\,u) - f(a)}{t}$

Test 663 Soit la demi-sphère $(x, y) \mapsto \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ et $a = (\frac{1}{2}, 0)$. Calculer les dérivées en a suivant les vecteurs $(1, 0)$, puis $(0, 1)$ puis $(1, 1)$. Pouvez-vous confirmer géométriquement ces résultats.

Propriétés : si f et g admettent des dérivées en a suivant u

- $f + g$ aussi et $D_u(f + g)(a) = D_u f(a) + D_u g(a)$
- $\lambda\, f$ aussi et $D_u(\lambda\, f)(a) = \lambda\, D_u f(a)$
- $f\,g$ aussi et $D_u(f\,g)(a) = D_u f(a)\, g(a) + f(a)\, D_u g(a)$
- si f ne s'annule pas sur E alors $\dfrac{1}{f}$ aussi et $D_u \dfrac{1}{f}(a) = -\dfrac{D_u f(a)}{f^2(a)}$
- si $\varphi : f(E) \to \mathbb{R}$ est dérivable en $f(a)$, alors $\varphi \circ f$ admet des dérivées selon u en a, et $D_u(\varphi \circ f)(a) = \varphi'\Big(f(a)\Big)\, D_u f(a)$

25.3.2 Dérivées partielles premières

Les **dérivées partielles** de f : $\left\{\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto & f(x_1, x_2) \end{array}\right.$ en $a = (a_1, a_2)$ sont

$\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a)}$ ou $\boxed{D_1 f(a)}$ ou $\boxed{f'_{x_1}(a)}$ dérivée en a selon $u = (1, 0)$

c'est la dérivée en a_1 de la fonction partielle $f(\cdot, a_2)$

$\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a)}$ ou $\boxed{D_2 f(a)}$ ou $\boxed{f'_{x_2}(a)}$ dérivée en a selon $u = (0, 1)$

c'est la dérivée en a_2 de la fonction partielle $f(a_1, \cdot)$

Notes :

- le "**1**" de $D_1 f$ désigne la dérivée selon la <u>première</u> place (ou variable)
- La notation $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ s'adapte suivant les notations utilisées.
- Comme ce sont des dérivées selon un vecteur u, les propriétés usuelles s'appliquent $\dfrac{\partial}{\partial x_1}(f+g) = \dfrac{\partial}{\partial x_1} f + \dfrac{\partial}{\partial x_1} g$, etc.
- Ces dérivées indiquent les pentes des tangentes des sections de la surface $z = f(x,y)$.

Test 664 Exprimer (quand elles existent) les dérivées partielles de $f\,g$ et de $\dfrac{f}{g}$.

Test 665 f est définie par $f(x,y) = \dfrac{x\,y}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0,)$ et $f(0,0) = 0$. Montrer que, en tout point de $\mathbb{R}^2$, f admet des dérivées partielles qu'on calculera.

25.3.3 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Important:

$f \in \mathcal{F}(E,\mathbb{R})$ est de <u>**de classe $\mathcal{C}^1$**</u> sur l'ouvert $E \subset \mathbb{R}^2$ <u>ssi</u>
f admet des dérivées partielles en tout point de $a \in E$
et les fonctions dérivées partielles $D_1 f$ et $D_2 f$ sont continues sur E

Test 666 Montrer que $(x,y) \mapsto x+y$ et $(x,y) \mapsto x\,y$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

<u>**Propriétés**</u> : d'après les résultats précédents (continuité et dérivées selon u)

- $\boxed{\mathcal{C}^1(E,\mathbb{R}) \text{ a une structure d'algèbre commutative}}$ (non intègre)
- Si $f \in \mathcal{C}^1(E,\mathbb{R})$ ne s'annule pas sur E, alors $\dfrac{1}{f} \in \mathcal{C}^1(E,\mathbb{R})$
- $\left.\begin{array}{c} f \in \mathcal{C}^1(E,\mathbb{R}) \\ \varphi \in \mathcal{C}^1\Big(f(E),\mathbb{R}\Big) \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi \circ f \in \mathcal{C}^1(E,\mathbb{R}).$
- Les projections canoniques $(x,y) \mapsto x$ et $(x,y) \mapsto y$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

(tout ceci permet de montrer rapidement qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^1$)

Th. ▷ <u>**Développement limité d'ordre 1 ([3])**</u>

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur E ouvert de $\mathbb{R}^2$, alors,
pour tous points $a = (a_1, a_2)$ et $x = (x_1, x_2)$ de E

$$f(x) = f(a) + (x_1 - a_1)\,\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + (x_2 - a_2)\,\frac{\partial f}{\partial x_2}(a) + \Big\|x - a\Big\|\;\varepsilon(x)$$

avec $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$

Th. ▷ <u>**Corollaire**</u>

Une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur E est donc continue sur E.

3. La démonstration est hors programme.

Th. ▷ **Conséquences sur les dérivées selon u**

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur E ouvert de $\mathbb{R}^2$, alors,
pour tout point $a \in E$ et pour tout vecteur $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$
f admet une dérivée en a selon u et

$$D_u f(a) = u_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + u_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)$$

L'application $u \mapsto D_u f(a)$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$.

$D_{u+\lambda v} f(a) = D_u f(a) + \lambda D_v f(a)$

Th. ▷ **Plan tangent à à la surface Γ d'équation $z = f(x, y)$**

▷ Soit le repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

▷ Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur E ouvert de $\mathbb{R}^2$, au point $m_0(x_0, y_0)$

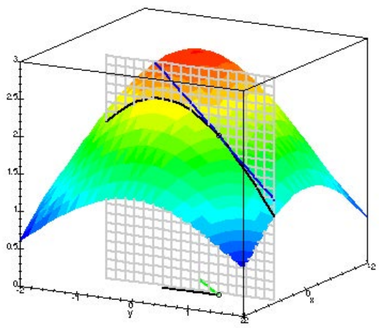
▷ Soit Γ la surface représentative de f dans $\mathcal{R}$ autrement dit

$$\Gamma = \{M(x, y, z) \text{ tel que } z = f(x, y) \text{ et } (x, y) \in E\}$$

▷ Soit $M_0(\underbrace{x_0, y_0}_{=m_0}, z_0) \in \Gamma$ avec $z_0 = f(x_0, y_0)$

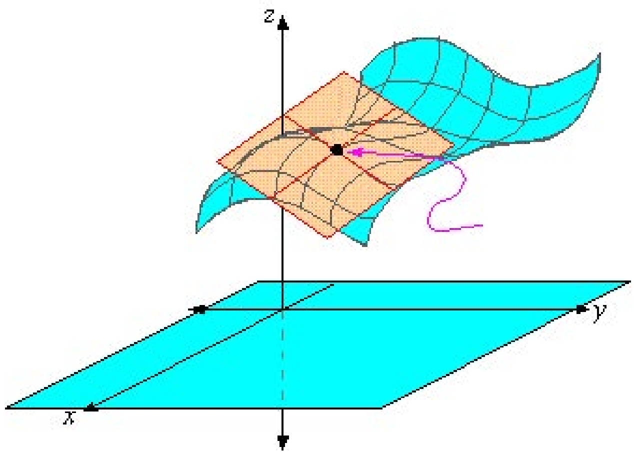
Alors Γ admet en ce point des tangentes dans toutes les directions et toutes ces tangentes forment le plan $P\left(M_0, \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial x}(m_0) \cdot \vec{k}, \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial y}(m_0) \cdot \vec{k}\right)$. C'est le plan tangent à Γ en M_0, d'équation :

$$(x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(m_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}f(m_0) - (z - z_0) = 0$$



• La section de Γ par le plan $P(M_0, \vec{k}, \underbrace{a\,\vec{i} + b\,\vec{j}}_{=\vec{u} \neq \vec{0}})$ passant par M_0 et orienté par les vecteurs $\vec{k}$ et $a\,\vec{i} + b\,\vec{j}$ est une courbe qui admet une tangente en A dirigée par $\vec{u} + D_u f(m_0)\,\vec{k}$
Cette droite est **une tangente à Γ** en M_0

• Toutes ces tangentes sont dans le plan $P\left(M_0, \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial x}(m_0) \cdot \vec{k}, \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial y}(m_0) \cdot \vec{k}\right)$ passant par M_0 et dirigé par $\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial x}(m_0) \cdot \vec{k}$ et $\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial y}(m_0) \cdot \vec{k}$.
Ce plan est **le plan tangent à Γ** en M_0



Test 667	Former l'équation du plan tangent en (a, b) à la surface d'équation $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$. Montrer que tous ces plans passent par un point fixe. Quelle est la nature de cette surface ?

25.3.4 Notation différentielle

Important:

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur E, le $\mathrm{DL}_1(a)$ peut s'écrire

$$f(a+h) = f(a) + \underbrace{h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)}_{=\, df_a(h)} + o\left(\left\|h\right\|\right)$$

La **différentielle de f en a** notée $\boxed{df(a)}$ ou $\boxed{df_a}$

est l'application $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ h = (h_1, h_2) \mapsto h_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a) + h_2 \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a)$

Remarques :

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur E :

$$\boxed{df_a(h) = D_h f(a) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)}$$

- En notant $\boxed{dx_1 \text{ et } dx_2}$ les projections canoniques :

$$\forall\, a \in E\,,\ \forall\, h \in \mathbb{R}^2\,,\ df_a(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) dx(h) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) dy(h)$$

$$\forall\, a \in E\,,\ df_a = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) dx + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) dy$$

La **différentielle de f** est l'application :

$$df : a \mapsto df_a,\ E \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$$

et les notations

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x_1}\, dx + \frac{\partial f}{\partial x_2}\, dy} \quad \text{et} \quad \boxed{df(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\, dx + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\, dy}$$

25.4 Notion de gradient

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur E, df_a est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$ autrement dit appartient à $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

Il existe donc un unique vecteur $u_a \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall\, h \in \mathbb{R}^2\,,\ df_a(h) = \left(u_a \,\middle|\, h \right)$

le **gradient** de f est l'application, $\quad \bigtriangledown f : \begin{cases} E & \to & \mathbb{R}^2 \\ a & \mapsto & u_a \end{cases}$

- $\forall\, a \in E\,,\ \forall\, h \in \mathbb{R}^2,\ \left(\bigtriangledown f(a) \,\middle|\, h \right) = df_a(h) = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a)\, h_1 + \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a)\, h_2$
- dans la base canonique $\mathcal{B}$

$$\boxed{\bigtriangledown f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\,,\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \right)_{/\mathcal{B}}}$$

- $\bigtriangledown f(a)$ est est la notation officielle.
  Certains auteurs utilisent les notations $\bigtriangledown_a f$ ou $\overrightarrow{\bigtriangledown}_a f$ ou $\overrightarrow{\bigtriangledown} f(a)$

Important: $$df_a(u) = \Big(\bigtriangledown f(a) \,\Big|\, u \Big) = D_u f(a)$$

Propriétés : $f, g \in \mathcal{C}^1(E, \mathbb{R})\,,\ \lambda \in \mathbb{R}$

- $\bigtriangledown(f + \lambda\, g) = \bigtriangledown(f) + \lambda \bigtriangledown(g)$ (linéarité)
- $\bigtriangledown(f\, g) = \bigtriangledown(f)\, g + f\, \bigtriangledown(g)$

Interprétation géométrique :

Soit $f \in \mathcal{C}^1(E, \mathbb{R})$ et Γ, surface d'équation $z = f(x, y)$ dans $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
En tout point $A(x_a, y_a, z_a) \in \Gamma$
le vecteur $\bigtriangledown f(x_a, y_a)$ indique la ligne de plus grande pente de Γ

Application au DL d'ordre 1 :

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur E ouvert de $\mathbb{R}^2$, alors,
pour tous points $a = (a_1, a_2)$ et $x = (x_1, x_2)$ de E

$$f(x) = f(a) + \Big(\bigtriangledown f(a) \,\Big|\, x - a \Big) + \Big\| x - a \Big\| \, \varepsilon(x)$$

avec $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$

25.5 Dérivée d'une composée

Th. ▷ **Dérivation de $I \xrightarrow{\varphi} F \xrightarrow{f} \mathbb{R}$**

Si $\varphi : t \mapsto \Big(\varphi_1(t), \varphi_2(t)\Big)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I
et $f : x = (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur F ouvert de $\mathbb{R}^2$
alors $\psi = f \circ \varphi : t \mapsto f\Big(\varphi_1(t), \varphi_2(t)\Big)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et

$$\boxed{\forall\, t \in I\,, \quad \psi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Big(\varphi(t)\Big)\, \varphi'_1(t) + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Big(\varphi(t)\Big)\, \varphi'_2(t) = \Big(\bigtriangledown f(\varphi(t)) \,\Big|\, \varphi'(t) \Big)}$$

Notes :

- Cette formule est facile à retenir. Il suffit d'appliquer à chaque variable intermédiaire la classique dérivée d'une composée :
$$\frac{d}{dt} f\Big(x(t)\Big) = f'\Big(x(t)\Big)\, x'(t)$$
- Dans la pratique, on allège parfois les notations en écrivant
$$\psi(t) = f\big(x_1(t), x_2(t)\big)$$
qu'on dérive en $\psi' = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x)\, x'_1 + \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x)\, x'_2$
- **mais il ne faut pas oublier** que
x'_1, x'_2 et x sont des fonctions de t.

Exemple

On retrouve la dérivée du produit $p : t \mapsto u(t)\,v(t)$ comme composée $t \mapsto \Big(u(t), v(t)\Big) \mapsto f\,\Big(u(t), v(t)\Big)$ où $f(u,v) = u\,v$

$$p'(t) = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)}_{=v}\; u'(t) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)}\; v'(t) = \; u = (v\,u' + u\,v')(t)$$

(noter l'abus de notation : on indique u et v au lieu de $u(t)$ et $v(t)$.)

Test 668

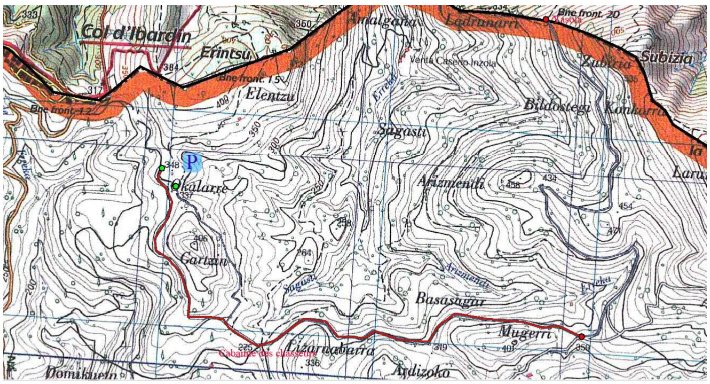
Dériver la composée $\varphi : t \mapsto f(e^t, e^{-t})$ où $f(u,v) = \dfrac{u}{v}$.
Vérifier en dérivant directement φ.

La **ligne de niveau** est la courbe d'une fonction φ définie sur un intervalle I à valeurs dans R^2 telle que $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ vérifie

$$\forall\, t \in I\,,\, f\,(x(t), y(t)) = C^{\text{te}}$$

Th. ▷ **Gradient et lignes de niveau**

Soit $f \in \mathcal{C}^1(E,\mathbb{R})$ et Γ, surface d'équation $z = f(x,y)$ dans $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
En tout point $A(x_a, y_a, z_a) \in \Gamma$
le vecteur $\bigtriangledown f(x_a, y_a)$ est orthogonal à la ligne de niveau



dérivation de $E \xrightarrow{g} F \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

Si $g : (x_1, x_2) \mapsto \Big(g_1(x_1,x_2), g_2(x_1,x_2)\Big)$ et $f : (u_1, u_2) \mapsto f(u_1, u_2)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur les ouvert E et F de $\mathbb{R}^2$, alors

$$h = f \circ g : \underbrace{(x_1, x_2)}_{x} \mapsto f\big(\underbrace{g_1(x_1,x_2)}_{u_1}, \underbrace{g_2(x_1,x_2)}_{u_2}\big)$$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur E et

$$\forall\, x \in E \quad \begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial x_1}(x) = \dfrac{\partial f}{\partial u_1}\Big(g(x)\Big)\dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}(x) + \dfrac{\partial f}{\partial u_2}\Big(g(x)\Big)\dfrac{\partial g_2}{\partial x_1}(x) \\ \dfrac{\partial h}{\partial x_2}(x) = \dfrac{\partial f}{\partial u_1}\Big(g(x)\Big)\dfrac{\partial g_1}{\partial x_2}(x) + \dfrac{\partial f}{\partial u_2}\Big(g(x)\Big)\dfrac{\partial g_2}{\partial x_2}(x) \end{cases}$$

Note

Là encore, on simplifie les notations en

$$(x,y) \mapsto h(x,y) = f\,\Big(u(x,y), v(x,y)\Big)$$

se dérive en $\dfrac{\partial h}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial h}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}$

(avec les mêmes dangers : les compositions n'apparaissent pas.)

Retour à la notation différentielle : indépendance des notations...

Si $z = f(x,y) = f\,\Big(x(u,v), y(u,v)\Big) = g(u,v)$ $\qquad$ (f, g, u, v de classe $\mathcal{C}^1$)

$$\text{alors} \quad dz = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy = \frac{\partial g}{\partial u}\,du + \frac{\partial g}{\partial v}\,dv$$

25.6 Extremum d'une fonction de deux variables

La fonction $f : E \to \mathbb{R}$ définie sur $E \subset \mathbb{R}^2$ présente :

- un **maximum absolu** en $a \in E$ ssi $\forall\, x\,,\ x \in E \Rightarrow f(x) \leqslant f(a)$
- un **minimum absolu** en $a \in E$ ssi $\forall\, x\,,\ x \in E \Rightarrow f(x) \geqslant f(a)$
- un **extremum absolu** en $a \in E$ ssi
  f présente un maximum ou un minimum absolu en a.
- f présente un maximum **local** en a (resp. minimum, extremum) ssi
  $\exists\, r > 0\,,\ f|_{E\cap\mathcal{B}(a,r)}$ présente un maximum absolu en a (resp. minimum, extremum).

Th. ▷ **Point critique**

Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur E ouvert de $\mathbb{R}^2$.

$$f \text{ présente un extremum local en } a \in E \ \Rightarrow\ \frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$$

Attention

- la réciproque est fausse (voir le contre-exemple).
- Ceci n'est valable que pour un ouvert de E
  (ou en un point situé dans $\overset{\circ}{E}$, intérieur de E)
- $a \in E$ vérifiant $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$ est appelé **point critique** .
- Les extremums sont donc soit des points critiques, soit "sur les bords" de l'ensemble de définition.

Contre-exemple

Le plus classique :
$f : (x,y) \mapsto x^2 - y^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
$O(0,0)$ est un point critique.
Pourtant : $\forall\, \varepsilon > 0\,,\ f(\varepsilon,0) > f(0,0)$ et $f(0,\varepsilon) < f(0,0)$ montre que f ne présente pas d'extremum local en O.

Test 669

Quels sont les extremums locaux de $f : (x,y) \mapsto \dfrac{x+y}{\frac{1}{2} + x^2 + y^2}$?

Test 670

Se méfier des intuitions...
Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur E ouvert de $\mathbb{R}^2$ contenant l'origine $O(0,0)$.

- Montrer que, si f présente un minimum absolu en O sur E, alors,
  $\forall\, u \neq (0,0)\,,\ \varphi_u : t \mapsto f(t\,u)$ présente un minimum local en 0.
- f est définie par $f(x,y) = y\,(y - x^2)$.
  - Montrer que : $\forall\, u \neq 0\,,\ \varphi_u$ présentent un minimum local en 0
  - f présente-t-elle un minimum local en O ?
  - qu'en déduisez-vous ?

25.7 Exercices

Ensemble de définition et lignes de niveaux

Exercice 1

Représenter les ensembles de définitions des fonctions suivantes :

1. $f(x, y) = \ln(2x + y - 2)$
2. $f(x, y) = \sqrt{1 - xy}$
3. $f(x, y) = \dfrac{\ln(y - x)}{x}$
4. $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}} + \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

Exercice 2

Représenter les lignes de niveau k pour les fonctions suivantes :

1. $f(x, y) = y^2$, avec $k = -1$ et $k = 1$
2. $f(x, y) = \dfrac{x^4 + y^4}{8?x^2y^2}$ avec $k = 2$
3. $f(x, y) = \sin(xy)$ avec $k = \dfrac{1}{2}$

Calcul de limites

Exercice 3

1. Montrer que si x et y sont des réels, on a : $2|xy| \leq x^2 + y^2$.
2. Soit f l'application de $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \dfrac{3x^2 + xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Montrer que, pour tout (x, y) de A, on a :
$$|f(x, y)| \leq 4 \left\| (x, y) \right\|_2$$
.
3. En déduire que f admet une limite en $(0, 0)$.

Exercice 4

Les fonctions suivantes ont-elles une limite (finie) en $(0, 0)$?

1. $f(x, y) = (x + y) \sin\left(\dfrac{1}{x^2 + y^2}\right)$
2. $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$
3. $f(x, y) = \dfrac{|x + y|}{x^2 + y^2}$

Continuité

Exercice 5

Démontrer que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} 2x^2 + y^2 - 1 & \text{si } x^2 + y^2 > 1 \\ x^2 & \text{sinon} \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
On définit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

Démontrer que F est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Dérivées partielles

Exercice 7

1. Soit g une fonction réelle de classe C^1 sur un ouvert V de $\mathbb{R}^2$ contenant au moins le cercle unité et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
   Montrer que
   $$\phi : t \mapsto g(cos(t), sin(t))$$
   est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

2. On pose $f : (x,y) \mapsto cos(x+y)$ et $g : (x,y) \mapsto (x+y, xy)$ Montrer que $h = f \circ g$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles.

Exercice 8

Soit

$$f : (x,y) \mapsto arctan(x) + arctan(y) - arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

1. Montrer que le domaine de définition D de f est la réunion de trois ouverts de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f est C^1 sur D, et calculer ses dérivées premières.

Exercice 9

On considère les ensembles D et $\tilde{D}$ de $\mathbb{R}^2$ définis par :

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 2x^2 + y^2 - 2y \leq 1\}$$

$$\tilde{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 2x^2 + y^2 - 2y < 1\}$$

On considère la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto x^2 e^y$$

1. Représenter l'ensemble D.
2. Déterminer les points critiques de f sur $\tilde{D}$.
3. Déterminer les minima de f sur $\tilde{D}$.

Exercice 10

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & sinon \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 11

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & si \qquad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & sinon \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f est C^1 sur $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.
2. Etudier f en $(0, 0)$.

Exercice 12

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer toutes les fonctions f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ telles que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - 4\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \alpha$$

   On utilisera le changement de variables

$$(u = 2x + y, v = 2x - y)$$

2. A quelles conditions sur les réels λ et μ, la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = \lambda\left(\cos(2x) + \sin(2x)\right)\left(\sin(y) + \cos(y)\right)$$
$$+\mu\left(\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16}\right)$$

   est-elle solution de l'équation précédente ?

Exercice 13

Soit (S) la surface d'équation cartésienne

$$z = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

Déterminer l'intersection de (S) avec son plan tangent au point $A(1, \sqrt{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{2})$.

25.8 Exercices Complémentaires

Exercice 1

Soit

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \dfrac{\sin(xy)}{|x|+|y|} \end{array} \right.$$

Montrer que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

Exercice 2

On considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \left\{ \begin{array}{rl} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad x=y=0 \end{array} \right.$$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3

On considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \left\{ \begin{array}{rl} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad x=y=0 \end{array} \right.$$

f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 4

Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \left\{ \begin{array}{rl} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad x=y=0 \end{array} \right.$$

est continue sur $\mathbb{R}^2$, admet en $(0,0)$ des dérivées selon tout vecteur mais n'est pas $\mathcal{C}^1$.

Exercice 5

Déterminer les extrema locaux de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = x^4 + y^4 - 4(x-y)^2$$

Montrer ensuite que f possède un minimum global sur $\mathbb{R}^2$. En quels points ?