Chapitre 23

Intégration sur un segment

Le programme se limite à l'intégration des fonctions continues par morceaux sur un segment. Les notions de fonction réglée et de fonction intégrable au sens de Riemann sont hors programme.

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$,
par ailleurs I et $[a;b]$ sont des intervalles de $\mathbb{R}$.

23.1 Continuité uniforme

23.1.1 Des exemples

La continuité de f en a se traduit par :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \eta > 0,\ \forall\, x,\ |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

La continuité de f sur I se traduit par :

$$\forall a \in I, \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \eta > 0,\ \forall\, x,\ |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

ou

$$\forall\, \varepsilon > 0, \forall a \in I,\ \exists\, \eta > 0,\ \forall\, x,\ |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

▶ ***Exemple N°1 :*** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin x$.
- ▷ l'ensemble des taux d'accroissement est borné[1] sur $\mathbb{R}$
- ▷ donc, pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe une valeur de η indépendante de a

▶ ***Exemple N°2 :*** $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
- ▷ $f(a) - f(2a) = \dfrac{1}{2\,a} > \varepsilon \Leftrightarrow a < \dfrac{1}{2\,\varepsilon}$.
- ▷ ceci montre qu'il est possible de trouver deux réels arbitrairement proches, dont les images sont distantes d'au moins ε.
- ▷ il est donc impossible de trouver une valeur de η indépendante de a

23.1.2 Continuité uniforme

$f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ est **uniformément continue** ssi

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \eta > 0,\ \forall\, x, y \in I,\ |x-y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Propriétés :

1. Cet exemple utilise une fonction lipschitzienne, mais l'existence d'un η indépendant de a n'est pas liée à la lipschitziannité.

- **Lien entre continuité et uniforme continuité :**
  - f uniformément continue sur $I \;\Rightarrow\; f$ continue sur I
  - La réciproque est fausse
- Si f est uniformément continue sur $[a,b]$ et $[b,c]$, elle l'est sur $[a,c]$.

Test 606 La fonction identique est-elle uniformément continue sur $\mathbb{R}$?

Test 607 Montrer que la fonction carrée n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$. On pourra commencer par écrire la négation de la définition d'uniformément continue.

Th. ▷ **Théorème de Heine** [2]

Si f est continue sur un segment $[a,b]$ (à valeurs dans $\mathbb{K}$),
alors f est uniformément continue sur $[a,b]$

Cas des fonctions lipschitziennes :

- Une fonction lipschitzienne sur un intervalle y est uniformément continue.
- **Attention :** la réciproque est fausse.

Test 608 Montrer que $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0,+\infty[$.
On pourra découper $[0,+\infty[$ en 2 intervalles : le segment $[0;1]$ et $[1;+\infty[$ où on montrera que f est lipschitzienne.

23.2 Fonctions en escalier

23.2.1 Subdivision d'un segment

Une **subdivision** [3] d'un segment $[a,b\,]$ est une famille $\sigma = (x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$
telle que $n \in \mathbb{N}^*$ et $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$

Le **pas** de la subdivision σ est $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(x_i - x_{i-1})$

Si $\sigma = (x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ et $\sigma' = (x'_i)_{0\leqslant i\leqslant m}$ sont deux subdivisions de $[a,b\,]$

σ est **plus fine que** σ' ssi $\forall\, i \in [\![0,m]\!]$, $\exists\, j \in [\![0,n]\!]$ $x'_i = x_j$.

Nous noterons $\sigma' \prec \sigma$ (voir [4])

Test 609 Quel est le pas de la subdivision de $[1,2]$: $1 < 1.2 < 1.5 < 1.85 < 2$

Test 610 Que peut-on dire du pas d'une subdivision du segment [0,1] ?

Test 611 Si σ et σ' sont deux subdivisions d'un même segment, avec σ plus fine que σ', que peut-on dire des pas de ces subdivisions ?
Que pensez-vous de la réciproque ?

Propriétés :

$\mathcal{S}$ désigne l'ensemble des subdivisions de $[a,b\,]$, $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties finies de $]a,b\,[$:

2. Heinrich Eduard HEINE (1821-1881)
3. On dit aussi **partage** du segment.
4. Cette notation n'est pas normalisée.

- L'application $\Delta \begin{cases} \mathcal{S} & \to & \mathcal{F} \\ (x_i)_{0\leqslant i\leqslant n} & \mapsto & \left\{x_i \mid 0 < i < n\right\} \end{cases}$ est une bijection
- $\sigma, \sigma' \in \mathcal{S}$: σ plus fine que σ' <u>ssi</u> $\Delta(\sigma') \subset \Delta(\sigma)$
- "être plus fine que" est donc une relation d'ordre sur $\mathcal{S}$
- Il est toujours possible de trouver une subdivision σ'' plus fine que deux subdivisions σ et σ' données.

La subdivision associée à la réunion $\Delta(\sigma) \cup \Delta(\sigma')$ convient.

(De manière abusive, nous parlerons de "réunion des subdivisions".)

Test 612 L'ordre "être plus fine que" est-il un ordre total sur $\mathcal{S}$?

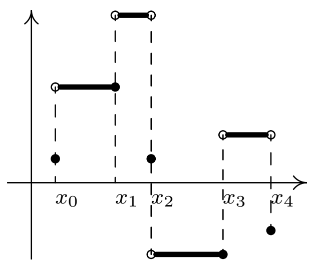
Test 613 Posons $\sigma'' = \Delta^{-1}\Big(\Delta(\sigma) \cup \Delta(\sigma')\Big)$. Montrer plus précisément que $\sigma'' = \sup\left\{\sigma, \sigma'\right\}$.
On pourra utiliser la caractérisation "σ plus fine que σ' <u>ssi</u> $\Delta(\sigma') \subset \Delta(\sigma)$".

23.2.2 Fonctions en escaliers sur un segment

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a; b]$.
f est en <u>**escalier**</u> sur $[a, b]$ <u>ssi</u>

il existe une subdivision $\sigma = (x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$
telle que
$$\forall\ i \in \left[\!\left[1, n\right]\!\right]\ ,\ f|_{]x_{i-1}, x_i[} \text{ est constante.}$$

On dit que la subdivision σ est <u>**subordonnée**</u> à f.



Nous noterons $\mathcal{E}_{[a,b],\mathbb{K}}$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$ (voir [5])

Test 614 Montrer que $x \mapsto E(4x)$ et $x \mapsto E(4x^2)$ sont en escalier sur $[0, 1]$.

Propriétés :

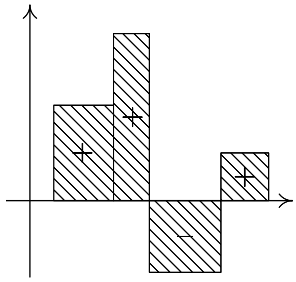
- Toute fonction constante sur un segment est en escalier.
- Si la subdivision σ est subordonnée à la fonction en escalier f, toute subdivision plus fine est également subordonnée à f.
- Une fonction en escalier sur $[a, b]$ est déterminée par la donnée
  - d'une subdivision subordonnée $\sigma = (x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$
  - de $2n+1$ scalaires $\begin{cases} \lambda_i & 1 \leqslant i \leqslant n & \text{valeur de } f|_{]x_{i-1}, x_i[} \\ \mu_i & 0 \leqslant i \leqslant n & f(x_i) = \mu_i \end{cases}$
- La valeur de f aux points de subdivision n'intervient pas dans la définition.
- Si on modifie un nombre fini de valeurs d'une fonction en escalier, on obtient une fonction en escalier.
- $\boxed{\Big(\mathcal{E}_{[a,b],\mathbb{K}}, +, \times\Big) \text{ est un anneau commutatif, non intègre.}}$

Test 615 Représenter la somme des fonctions $x \mapsto E(4x)$ et $x \mapsto E(4x^2)$

5. Cette notation n'est pas normalisée.

23.2.3 Intégrale d'une fonction en escalier

L'intégrale d'une fonction, en escalier et à valeurs réelles, sur le segment I est l'aire algébrique de la surface comprise entre l'axe $x'O\,x$ et $\mathcal{C}$, représentation graphique de f



Th. ▷ **Intégrale d'une fonction en escalier**

Si $\sigma = (x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est une subdivision subordonnée à $f \in \mathcal{E}_{[a,b],\mathbb{K}}$,
et $\forall\ i \in [\![1, n]\!]$, $x \in]x_{i-1}, x_i[\Rightarrow f(x) = \lambda_i$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\,\lambda_i \qquad \text{est indépendante de la subdivision}$$

C'est l' **intégrale** de f sur $[a, b\,]$, notée $\boxed{\displaystyle\int_{[a,b\,]} f}$ ou $\boxed{\displaystyle\int_{[a,b\,]} f(t)\,dt}$

Remarques

- L'intégrale de $f \in \mathcal{E}_{[a,b],\mathbb{K}}$ ne dépend pas de la valeur de f aux points de subdivision.
- Si $f : x \mapsto \lambda$ est constante sur $[a, b]$: $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \lambda\,(b - a)$.
- Il en est de même si f est constante sauf en un nombre fini de points.

Test 616 Calculer $\displaystyle\int_{[0,1]} E(3\,t)\,dt$, $\displaystyle\int_{[0,2]} E(3\,t)\,dt$, $\displaystyle\int_{[0,1]} E(\frac{1}{2} - 3\,t)\,dt$.

23.2.4 Propriétés

▶ **Linéarité :** $\forall\ f, g \in \mathcal{E}_{[a,b\,]}$, $\forall\ \alpha \in \mathbb{K}$,

$$\int_{[a,b]} (f + g) = \int_{[a,b]} f + \int_{[a,b]} g \qquad \int_{[a,b]} (\alpha\, f) = \alpha \int_{[a,b]} f$$

(L'intégration est une forme linéaire sur $\mathcal{E}_{[a,b],\mathbb{K}}$).

▶ **Relation de Chasles :** si $f \in \mathcal{E}_{[a,b],\mathbb{K}}$ et $a < c < b$, alors

$$\int_{[a,b\,]} f = \int_{[a,c\,]} f + \int_{[c,b\,]} f$$

(Remarquons que les restrictions de f sont des fonctions en escalier.)

▶ **Croissance :** $\forall\ f, g \in \mathcal{E}_{[a,b],\mathbb{R}}$

▷ $f \geqslant \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \displaystyle\int_{[a,b]} f \geqslant 0$

▷ $f \geqslant g \quad \Rightarrow \quad \displaystyle\int_{[a,b]} f \geqslant \int_{[a,b]} g$

Test 617 Que pensez-vous de la réciproque : $\displaystyle\int_{[a,b]} f \geqslant 0 \Rightarrow f \geqslant \mathbf{0}$?

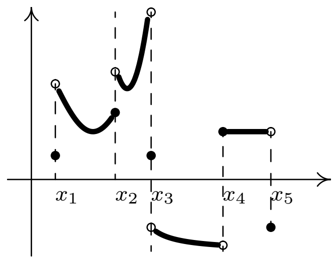
Test 618 $f \in \mathcal{E}_{[a,b],\mathbb{R}}$ n'est pas la fonction nulle. A-t-on $f \geqslant \mathbf{0} \Rightarrow \displaystyle\int_{[a,b]} f > 0$?

23.3 Fonctions continues par morceaux

23.3.1 Algèbre des fonctions continues par morceaux

f est en **continue par morceaux** sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$,
ssi

il existe une subdivision $\sigma = (x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$
telle que, $\forall\, i \in [\![1,n]\!]$:
f est continue sur $]x_{i-1}, x_i[$
f admet une limite finie à droite en x_{i-1}
f admet une limite finie à gauche en x_i



On dit que la subdivision σ est **subordonnée** à f.

Remarque

Une fonction en escalier est une fonction continue par morceaux.

Test 619 Justifier qu'une fonction en escalier est continue par morceaux ?

Test 620 La fonction définie sur $[-1,1]$ par $f(0) = 0$ et, si $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{E(2\,x)}{x}$ est-elle continue par morceaux ?

Test 621 La fonction définie par $f(0) = 0$ et $\forall\, x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{E(2\,x)}{x}$ est-elle continue par morceaux sur $[0,2]$?

Propriétés :

- si la subdivision σ est subordonnée à f,
  il en est de même pour toute subdivision plus fine
- Toute fonction continue par morceaux sur un segment est bornée
- L'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$
  est un sous-anneau de $\mathcal{F}([a,b],\mathbb{K})$

23.3.2 Approximation par une fonction en escalier

Th. ▷ **Approximation uniforme d'une fonction continue**

Toute fonction de $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K})$ peut être approchée uniformément par une fonction en escalier, avec une précision arbitraire :

$$\forall\, f \in \mathcal{C}^0([a,b])\,,\ \forall\, \varepsilon > 0\,,\ \exists\, \theta \in \mathcal{E}_{[a,b],\mathbb{K}} \quad \Big| f - \theta \Big| \leqslant \varepsilon$$

Conséquence : on peut également approcher uniformément une fonction continue par morceaux par une fonction en escalier.
(avec une précision arbitraire)

Th. ▷ **Encadrement d'une fonction continue à valeurs réelles**

Toute fonction de réelle continue sur le segment $[a;b]$ est encadrée par deux fonctions en escalier et réelles θ et φ dont la différence est arbitrairement petite :

$$\forall\, f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}),\ \forall\, \varepsilon > 0,$$
$$\exists\, \theta, \varphi \in \mathcal{E}_{[a,b],\mathbb{R}} \quad \theta \leqslant f \leqslant \varphi \quad \text{et} \quad |\varphi - \theta| \leqslant \varepsilon$$

23.3.3 Intégrale d'une fonction réelle continue par morceaux

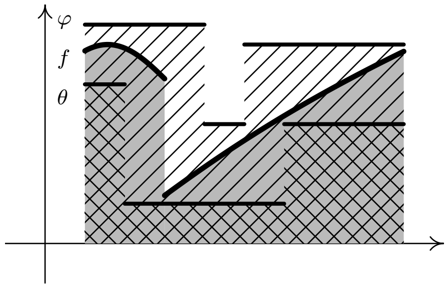
Important: On se limite dans cette section aux fonctions à valeurs réelles.

Interprétation en termes d'aire :

Notons $\Delta_f = \left\{ M(x,y) \mid x \in [a,b] \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant f(x) \right\}$.

pour une fonction positive f encadrée par deux fonctions en escalier θ et φ,

l'aire de Δ_f est comprise entre celles de Δ_θ et Δ_φ.



Si $\varphi - \theta \leqslant \varepsilon$, les intégrales $\displaystyle\int_{[a,b]} \theta$ et $\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi$ approchent l'aire de Δ_f

avec la précision $\varepsilon\,(b-a)$.

Th. ▷ **Définition de l'intégrale**

Si f est continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ à valeurs réelles, alors

$$I_- = \left\{ \int_{[a,b]} \theta \mid \theta \in \mathcal{E}_{[a,b],\mathbb{R}}\ \theta \leqslant f \right\} \text{ admet une borne supérieure : } s$$

$$I_+ = \left\{ \int_{[a,b]} \varphi \mid \varphi \in \mathcal{E}_{[a,b],\mathbb{R}}\ f \leqslant \varphi \right\} \text{ admet une borne inférieure : } S$$

qui sont égales ($s = S$). C'est l' **intégrale** de f sur $[a,b]$

Remarque : Si f est en escalier, nous avons $s = S = \displaystyle\int_{[a,b]} f$.

Ceci permet d'utiliser la même notation de l'intégrale pour les fonctions en escalier et pour les fonctions continues par morceaux.

$\boxed{\displaystyle\int_{[a,b]} f}$ ou $\boxed{\displaystyle\int_{[a,b]} f(t)\,dt}$

Exemple :

Pour calculer $\displaystyle\int_{[0,1]} t\,dt$, on utilise des subdivisions régulières $\left(\frac{1}{n}\right)$ de $[0,1]$.

et les fonctions en escalier θ et φ définies par

$$x \in \left]\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right[\Rightarrow \theta(x) = \frac{i-1}{n} \quad \text{et} \quad \varphi(x) = \frac{i}{n}$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{(n-1)n}{2n^2} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n^2} \in I_- \quad \text{et} \quad \frac{n(n+1)}{2n^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2} \in I_+$$

d'où $\dfrac{(n-1)n}{2n^2} \leqslant s = S \leqslant \dfrac{n(n+1)}{2n^2} \Rightarrow s = S = \dfrac{1}{2}$ (pincement en ∞)

Test 622

Utiliser la définition pour calculer $\displaystyle\int_{[0,1]} t^2\,dt$.

On pourra s'inspirer de l'exemple précédent.

Définition de $\boxed{\int_a^b f}$: si $a < b$: $\int_a^b f = \int_{[a,b]} f$

si $b < a$: $\int_a^b f = -\int_{[a,b]} f$

si $a = b$: $\int_a^b f = 0$

Il est alors évident que $\boxed{\int_a^b f = -\int_b^a f}$

Noter que $\int_{[a,b]} f = \int_{[b,a]} f = \int_{\min(a,b)}^{\max(a,b)} f$

La notation $\int_I f$ est utilisée pour assurer "l'ordre usuel des bornes".

23.3.4 Intégrale d'une fonction complexe continue par morceaux

Th. ▷ **Définition de l'intégrale**

Si f est continue par morceaux sur le segment $[a, b]$ à valeurs complexes, alors l'**intégrale** de f sur $[a, b]$ est définie par

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \mathrm{Re}\, f + i \int_{[a,b]} \mathrm{Im}\, f$$

23.3.5 Propriétés

$\mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{K})$ désigne l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$

Th. ▷ **Un outil**

pour toute fonction f continue par morceaux sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$
pour toute suite (θ_n) de fonctions en escalier sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$

$$\left|\theta_n - f\right| \leqslant \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \theta_n$$

▶ **linéarité :**

$$\forall\, f, g \in \mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{R}) \ , \ \forall\, \lambda \in \mathbb{R} \, , \quad \int_a^b (f + \lambda\, g) = \int_a^b f + \lambda \int_a^b g$$

L'intégration est une forme linéaire sur $\mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{R})$

▶ **Relation de Chasles :**
Si f, à valeurs dans $\mathbb{R}$, est continue par morceaux sur les intervalles $[a, b]$, $[b, c]$ et $[c, a]$

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$$

(ceci quel que soit l'ordre des points a, b et c .)

▶ **La linéarité et la relation de Chasles s'étend à $\mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{C})$:**

▶ **Croissance :** $\boxed{\text{vérifier } \boxed{a < b} \text{ est fondamental ici}}$

$\forall\, f, g \in \mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{R})$:

▷ $a < b$ et $\mathbf{0} \leqslant f \quad \Rightarrow \quad 0 \leqslant \int_a^b f$

▷ $a < b$ et $f \leqslant g \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f \leqslant \int_a^b g$

▷ $a < b \ \Rightarrow \left| \int_a^b f \right| \leqslant \int_a^b \left| f \right|$ (voir l'inégalité de la moyenne page 353)

▶ **Seule l'inégalité des modules s'étend à $\mathcal{C}_m([a,b],\mathbb{C})$.**

▶ **Inégalités :** $\forall\ f,g \in \mathcal{C}_m([a,b],\mathbb{R})$:

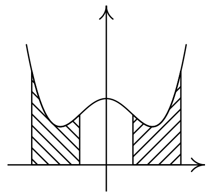
▷ **Inégalité de Cauchy[6]-Schwarz[7] :** $\boxed{\left(\int_{[a,b]} f\,g\right)^2 \leqslant \int_{[a,b]} f^2 \times \int_{[a,b]} g^2}$

▷ **Inégalité de Minkowski[8] :** $\boxed{\sqrt{\int_{[a,b]} (f+g)^2} \leqslant \sqrt{\int_{[a,b]} f^2} + \sqrt{\int_{[a,b]} g^2}}$

23.3.6 Cas des fonctions paires, impaires, périodiques

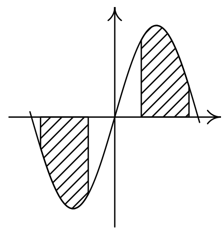
Si f continue est paire, alors $\int_a^b f = \int_{-b}^{-a} f$

Cas particulier : $\int_{-a}^{a} f = 2\int_0^a f$



Si f continue est impaire, alors $\int_a^b f = -\int_{-b}^{-a} f$

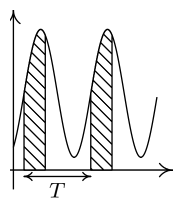
Cas particulier : $\int_{-a}^{a} f = 0$



Si f continue est T-périodique :

$\int_a^b f = \int_{a+T}^{b+T} f$

$\int_a^{a+T} f$ est indépendant de a

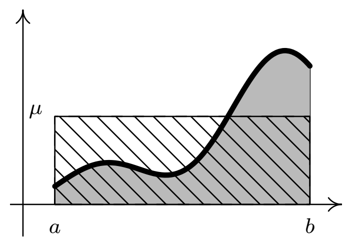


23.3.7 Valeur moyenne

f est continue par morceaux sur $[a,b]$, à valeurs dans $\mathbb{K}$ $(a \neq b)$.

La **valeur moyenne** de f sur $[a,b]$ est

$$\mu = \frac{1}{\left|b-a\right|} \int_{[a,b]} f = \frac{1}{b-a}\int_a^b f$$



Idée : Le rectangle et la partie grisée ont même aire algébrique.

6. Augustin-Louis CAUCHY (1789-1857) mathématicien Français.
7. Hermann Amandus SCHWARZ (1843-1921) mathématicien Allemand élève de Weierstrass.
Ne pas confondre avec Laurent SCHWARZ (1915-2002) brillant mathématicien Français, animateur du groupe BOURBAKI.
8. Herman MINKOWSKI (1864-1909) mathématicien Allemand, a enseigné à Albert Einstein (école polytechnique de Zürich)

Exemple

Valeur efficace d'un courant alternatif d'intensité $I(t) = I_m \cos(\omega\, t)$:
l'énergie dissipée dans une résistance morte ($R\,\Omega$) pendant une période est
$\displaystyle\int_0^{2\pi/\omega} R\,I_m^2 \underbrace{\cos^2(\omega t)}_{\frac{1+\cos(2\omega t)}{2}}\, dt = \left[R\,I_m^2\left(\frac{\sin(2\omega t)}{4\omega} + \frac{t}{2}\right)\right]_0^{2\pi/\omega} = \frac{\pi}{\omega} R I_m^2$ qui serait
obtenue par un courant continu d'intensité $I_e = \dfrac{I_m}{\sqrt{2}}$.

Test 623 Représenter, sur [-2 , 4]-{0}, la fonction qui à x associe la valeur moyenne de la fonction E (partie entière) entre 0 et x. Pour cela il faudra distinguer 6 cas autrement dit découper [-2 , 4] en 6 intervalles de longueur 1.

Th. ▷ **Inégalité de la moyenne** [9]

Si f et g sont continues par morceaux sur $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{K}$:

$$\left|\int_{[a,b]} f\,g\right| \leqslant \sup_{[a,b]}\left|f\right| \times \int_{[a,b]}\left|g\right|$$

En particulier : $\boxed{\left|\int_a^b f\right| \leqslant \left|b-a\right| \sup_{[a,b]}\left|f\right|}$

Test 624 Montrer : $m \leqslant f \leqslant M \Rightarrow m\left|b-a\right| \leqslant \int_{[a,b]} f \leqslant M\left|b-a\right|$

23.3.8 Cas des fonctions continues réelles

Th. ▷ **Fonction nulle**

Une fonction à valeurs réelles, continue, positive sur $[a, b]$, est nulle
<u>ssi</u> son intégrale sur $[a, b]$ est nulle.

$$\left.\begin{array}{r} f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}) \\ \forall\, x \in [a,b]\ f(x) \geqslant 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \qquad \int_{[a,b]} f = 0 \Leftrightarrow f = \mathbf{0}$$

(Ceci reste valable avec une fonction négative.)

Test 625 Donner un exemple qui montre que la continuité est indispensable.

Conséquence sur l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $f, g \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$:

$$\left(\int_{[a,b]} f\,g\right)^2 = \int_{[a,b]} f^2 \times \int_{[a,b]} g^2 \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ et } g \text{ sont proportionnelles}$$

avec des fonctions continues, l'inégalité de Cauchy-Schwarz est une égalité <u>ssi</u> les fonctions sont proportionnelles.

9. Voir également l'**égalité de la moyenne** (23.4.1 page 354).

23.4 Fonction définie par une intégrale

23.4.1 Théorème de Leibniz, primitive

Th. ▷ **intégrale d'une fonction continue par morceaux**

Si $a \in I$, intervalle de $\mathbb{R}$,
et f est continue par morceaux sur tout segment de I,

alors, $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$. est continue sur I

Plus précisément, cette fonction est lipschitzienne sur tout segment de I (mais pas nécessairement sur I.)

Th. ▷ **Théorème de Leibniz**

Si f est continue sur I alors

$$\forall\, a \in I\,,\quad F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt \text{ est \underline{une} primitive de } f \text{ sur } I$$

Plus précisément, F est la primitive qui s'annule en a.

Attention : *ce théorème est faux si f est continue par morceaux.*

Corollaire f est continue sur $[a,b]$ $\Rightarrow$

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = \Big[F(t)\Big]_a^b = F(b) - F(a)}$$

où F est une primitive quelconque de f sur $[a,b]$

Th. ▷ **Formule (ou égalité) de la moyenne[10] :**

Sur un segment, une fonction continue atteint sa valeur moyenne

$$f \in \mathcal{C}^0([a,b]) \;\Rightarrow\; \exists\, c \in]a,b[\qquad \int_a^b f = (b-a)\,f(c)$$

Test 626 Si f est dérivable sur $[a,b]$, peut-on dire que $\displaystyle\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a)$?

Test 627 $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$. Les fonctions suivantes sont-elles des primitives de f ?

$$g_1(x) = \int_x^0 f(t)\,dt \qquad g_2(x) = \int_0^{2x} f(t)\,dt$$

Sont-elles dérivables ? Si oui, calculer la dérivée.

Test 628 f est continue sur l'intervalle $I = [-1;1]$. Notons F une primitive de f sur I.
Montrer que la fonction g définie sur I par $g(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} f(t)\,dt$ est dérivable sur I, et calculer la dérivée.

Test 629 Justifier que $g : x \mapsto \displaystyle\int_1^x \sin^3(x+t)\,dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
On pourra commencer par montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x)$ existe puis effectuer le changement de variable $u = x + t$, enfin considérer une primitive F de $f : u \mapsto \sin^3(u)$ sur $\mathbb{R}$.

10. Bizarrement, cette formule très utile est hors programme.

23.4.2 Formules de Taylor

Th. ▷ **Formule de Taylor avec reste intégral :**

$n \in \mathbb{N}$. Si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I intervalle contenant a et b, on a :

$$\boxed{f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k\,!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n\,!} f^{(n+1)}(t)\,dt}$$

Th. ▷ **Inégalité de Taylor-Lagrange :**

Si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I contenant a et b,
Si $|f^{(n+1)}|$ est majoré par M sur I alors

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k\,!} f^{(k)}(a) \right| \leqslant \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} M$$

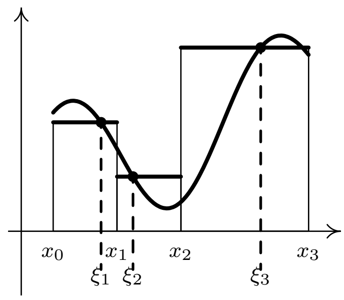
23.5 Approximations d'une intégrale

23.5.1 Somme de Riemann

f est continue sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$,
$\sigma = (x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est une subdivision de $[a,b]$,
$\tau = (\xi_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in [a,b]^n$ vérifie : $\forall\, i \in [\![1,n]\!]$, $x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$.

La **somme de Riemann** [11]de f,
associée à σ et à la famille τ
est $\mathcal{R}(f,\sigma,\tau) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, f(\xi_i)$

(C'est l'intégrale d'une fonction en escalier)



Test 630

Évaluer la somme de Riemann $\mathcal{R}(f,\sigma,\tau)$ lorsque $f(x) = x^2$, $\sigma = (x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est la subdivision régulière de $[0,1]$, et $\tau = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.
On a donc $\forall i \in [\![0;n]\!]$, $x_i = \dfrac{i}{n}$.
Cette somme admet-elle une limite quand $n \to \infty$?

Test 631

Interpréter les sommes suivantes comme des sommes de Riemann dont on précisera les éléments :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sin\frac{i}{n}\ , \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2}\ , \qquad \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{i}{n^3}}$$

11. Georg Friedrich RIEMANN (1826-1866) mathématicien Allemand.

  Alain Couteèle et Mélissa Bailloeuil

Th. ▷ **Approximation par une somme de Riemann**

Si f est continue sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$,
toute somme de Riemann, de pas suffisamment petit, approche arbitrairement l'intégrale $\displaystyle\int_{[a,b]} f$

$$f \text{ continue sur } [a,b] : \quad \forall\, \varepsilon > 0\,,$$
$$\exists\, \eta > 0\,,\ \forall\, \sigma \text{ subdivision de } [a,b]\,,\ \forall\, \tau \text{ famille associée}\,,$$
$$\text{pas}(\sigma) < \eta \Rightarrow \left| \mathcal{R}(f,\sigma,\tau) - \int_{[a,b]} f \right| < \varepsilon$$

Remarque On ne peut pas dire que, lorsque le pas tend vers 0, les sommes de Riemann tendent vers l'intégrale : nous n'avons pas une application qui à "un pas" associe "une subdivision et une famille".
Par contre, si $\Big(\mathcal{R}(f,\sigma_n,\tau_n)\Big)$ est une suite de sommes de Riemann, et que $\lim\limits_{n\to\infty} \Big(\text{pas}(\sigma_n)\Big) = 0$,

alors la suite $\Big(\mathcal{R}(f,\sigma_n,\tau_n)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\displaystyle\int_{[a,b]} f$

Th. ▷ **Somme de Riemann et fonction lipschitzienne**

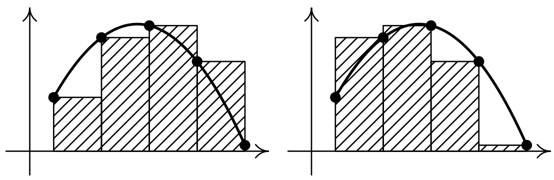
Si f est k-lipschitzienne sur $[a,b]$
σ est une subdivision de $[a,b]$,
τ une une famille associée à σ

$$\left| \mathcal{R}(f,\sigma,\tau) - \int_{[a,b]} f \right| \leqslant k \,\Big| b-a \Big|\ \text{pas}(\sigma)$$

23.5.2 Autres approximations d'une intégrale

▶ **Méthode des rectangles :**

L'idée *est d'approcher l'intégrale par une somme de Riemann, avec une subdivision* $\sigma = (x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ *régulière de* $[a,b]$, *et la famille* $\tau = (\xi_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ *où* ξ_i *est une extrémité du segment* $[x_{i-1}, x_i]$ *, donc, soit* $\xi_i = x_{i-1}$ *, soit* $\xi_i = x_i$ *.*



On obtient donc deux formules différentes :

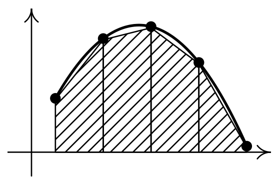
$$\boxed{R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\,\frac{b-a}{n}\right)} \qquad \boxed{R'_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\,\frac{b-a}{n}\right)}$$

Qualité : si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$:

$$\boxed{\left| \int_{[a,b]} f - R_n(f) \right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2\,n} \sup_{[a,b]} \Big| f' \Big|} \qquad \text{méthode en } \boxed{\frac{k}{n}}$$

▶ **Méthode des trapèzes :**

L'idée *est d'approcher la courbe par des trapèzes construits sur les intervalles d'une subdivision régulière de* $[a,b]$.



On obtient la formule suivante :

$$\boxed{T_n(f) = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f\left(a + i\,\frac{b-a}{n}\right)\right)}$$

Remarque : $T_n = \dfrac{R_n + R'_n}{2}$ est la moyenne entre $R_n(f)$ et $R'_n(f)$.

Qualité : si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$\boxed{\left|\int_{[a,b]} f - T_n(f)\right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12\,n^2} \sup_{[a,b]} \left|f''\right|} \qquad \text{méthode en } \boxed{\frac{k}{n^2}}$$

Attention Dans la pratique, à l'erreur ε_m due à la méthode, s'ajoute l'erreur ε_c due aux approximations sur chaque terme de la somme :

- On diminue ε_m en augmentant la valeur de n
- On diminue ε_c en diminuant la valeur de n

Il faut chercher un compromis... [12]

Test 632 Majorer l'erreur commise en évaluant $\displaystyle\int_0^1 e^t\,dt$ avec $n = 10$ par les différentes méthodes. Qu'en déduisez-vous si les calculs sont effectués avec trois chiffres significatifs ?

23.6 Etude de suites d'intégrales

Point Méthode : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx$$

1. Montrons que cette suite (I_n) est définie.
   $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x \mapsto \dfrac{x^n}{1+x^2}$ est continue sur $[0;1]$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0;1]$.
   Par conséquent, cette fonction est intégrable sur $[0;1]$.
   $\forall n \in \mathbb{N}^*$, I_n existe.

2. Montrons que cette suite (I_n) est décroissante.
   $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

   $$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x^2}dx - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{x^{n+1}-x^n}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x^2}dx$$

   Or $\forall x \in [0;1]$, $x^n \geq 0$, $(x-1) \leq 0$ et $1+x^2 > 0$ et donc $\dfrac{x^n(x-1)}{1+x^2} \leq 0$,
   Par positivité de l'intégrale avec des bornes 0 et 1 rangées dans l'ordre croissant, on obtient

   $$\int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x^2}dx \leq 0 \text{ donc } I_{n+1} - I_n \leq 0$$

   Finalement la suite (I_n) est décroissante.

3. Montrons que cette suite (I_n) est convergente.
   $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in [0;1]$,

   $$0 \leq \frac{x^n}{1+x^2}$$

12. Voir l'exercice en fin de paragraphe.

Or $x \mapsto \dfrac{x^n}{1+x^2}$ est continue sur $[0;1]$ donc intégrable.
Par positivité de l'intégrale avec des bornes 0 et 1 rangées dans l'ordre croissant, on obtient

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx \text{ d'où } 0 \leq I_n$$

Finalement (I_n) est décroissante minorée par 0 donc (I_n) est convergente.

4. Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in [0;1]$, $0 \leq \dfrac{x^n}{1+x^2} \leq x^n$.
   $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in [0;1]$,
   $$0 \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1$$
   $$0 \leq \frac{x^n}{1+x^2} \leq x^n$$

5. Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.
   $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in [0;1]$, $0 \leq \dfrac{x^n}{1+x^2} \leq x^n$. Or $x \mapsto \dfrac{x^n}{1+x^2}$ et $x \mapsto x^n$ sont continues sur $[0;1]$ donc intégrables.
   Par positivité de l'intégrale avec des bornes 0 et 1 rangées dans l'ordre croissant, on obtient
   $$0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx \leq \int_0^1 x^n dx$$
   $$0 \leq I_n \leq \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1}\right]_0^1$$
   $$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

6. Déterminons la limite de cette suite.
   $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$. Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$, par le théorème d'encadrement, on obtient
   $$\lim_{x \to +\infty} I_n = 0$$

23.7 Exercices

Exercice 1

1. Justifier rapidement que les applications suivantes
$$\varphi_0 : P \mapsto P(0)\,, \qquad \varphi_1 : P \mapsto P(1)\,, \qquad \varphi_2 : P \mapsto \int_0^1 P(t)\,dt$$
sont des formes linéaires sur $\mathbb{R}_1[X]$.
2. Montrer que $\Big(\varphi_0, \varphi_1\Big)$ est libre et que $\Big(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2\Big)$ est liée.
3. Exprimer φ_2 en fonction de φ_0 et φ_1 .

Etudes de suites d'intégrales

Exercice 2

Vérifier : $\forall x \in [0, +\infty[, \quad 0 \leqslant \ln(1 + x) \leqslant x$.

En déduire un encadrement de $I_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(1 + x^n)dx$ et donner $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

Exercice 3

Etudier la monotonie des suites suivantes ($n \in \mathbb{N}^*$).

- $a_n = \displaystyle\int_0^n \exp(-t^2)dt$
- $b_n = \displaystyle\int_1^n \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx$
- $c_n = \displaystyle\int_2^0 x\exp(nx)dx$
- $d_n = \displaystyle\int_{-1}^0 x\exp(n^2x)dx$

Exercice 4

On pose pour tout entier naturel non nul n :
$$I_n = \int_1^e (\ln(x))^n dx \text{ et } I_0 = e - 1$$

1. Donner la monotonie de la suite $(I_n)_{n>0}$.
2. Montrer que $\forall n > 0, \quad I_n \geqslant 0$.
3. Etablir, pour tout entier naturel n non nul, $I_{n+1} = e - (n + 1)I_n$.
4. Déduire des questions précédentes que $\forall n > 0$:
$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{n + 1}$$
5. Quelle est la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?
6. A l'aide de la question 3, montrer que : $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{e}{n}$.

Exercice 5

$\forall n \geqslant 1$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1 + t^2}dt$ et $J_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \ln(1 + t^2)dt$.

1. Calculer I_1.
2. Déterminer la monotonie des suites $(I_n)_{n\geqslant 0}$ et $(J_n)_{n\geqslant 0}$.
3. Montrer que $\forall n \geqslant 1$, $\forall t \in [0;1]$, $0 \leqslant \dfrac{t^n}{1+t^2} \leqslant t^n$
4. Montrer que $\forall n \geqslant 1$, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$
5. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
6. Par une intégration par parties, montrer que $J_n = \dfrac{\ln 2}{n+1} - \dfrac{2}{n+1} I_{n+2}$
7. En déduire la convergence de la suite (J_n).
8. Montrer que J_n est équivalent à $\dfrac{ln(2)}{n+1}$ en $+\infty$.

23.7.1 Intégrale de Riemann

Exercice 6

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Montrer qu'il existe c dans $[a, b]$ tel que $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)dt$

Exercice 7

Soit φ une fonction en escalier sur $[a, b]$. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on note $u_n = \displaystyle\int_a^b \varphi(x)sin(nx)dx$

1. Montrer que $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = 0$
2. En déduire que le résultat est conservé si φ est continue par morceaux sur $[a, b]$.

Exercice 8

Montrer que, si $0 < a < b$, alors $\ln(b) - \ln(a) \leq \dfrac{b-a}{\sqrt{ab}}$.

Indication : appliquer l'inégalité de *Cauchy-Schwarz* à $x \mapsto 1$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

Exercice 9

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, une fonction de classe C^2 vérifiant $f(a) = f(b) = 0$.

Montrer qu'on a l'inégalité : $\left(\displaystyle\int_a^b f'^2\right)^2 \leq \displaystyle\int_a^b f^2 \times \int_a^b f''^2$.

Indication : il n'y a pas que Cauchy-Schwarz dans la vie ...... penser aussi à l'IPP !

Exercice 10

Soit $f \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$: montrer

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) f\left(\frac{k+1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f^2(t)\mathrm{d}t$$

Exercice 11

En l'encadrant par deux sommes de Riemann, trouver la limite de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n+k-1)(n+k)}}$.

Exercice 12

Calculer les limites éventuelles des suites $u = (u_n)$ définies par :

1. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$
2. $u_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin(\frac{k\pi}{n})$
3. $u_n = \displaystyle\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$
4. $u_n = \displaystyle\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} ke^{-k/n}$
5. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2-\frac{k^2}{2}}}$
6. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{n^2-k^2}{n^4}}$
7. $u_n = \displaystyle\left(\prod_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}}$
8. $u_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \cos^2(\frac{k\pi}{n})$
9. $u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$
10. $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{n}{k^2}$

Exercice 13

Soit f une fonction continue sur un segment $[a;b]$ à valeurs réelles. Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que

$$\left|\int_{[a,b]} f\right| = \int_{[a,b]} |f|$$

On pourra distinguer deux cas : $\displaystyle\int_{[a,b]} f \geq 0$ puis $\displaystyle\int_{[a,b]} f < 0$.

Exercice 14

Soit f une fonction continue sur $I = [0;1]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_n par $f_n(t) = t^n$, et on pose $J_n(f) = \displaystyle\int_I f\, f_n$.

1. Montrer que si f est positive, la suite $\big(J_n(f)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
2. On ne suppose plus nécessairement que f est positive. En utilisant $\displaystyle\int_I f_n = \frac{1}{n+1}$, montrer que $\big(J_n(f)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est de limite nulle.

Exercice 15

Comparaison série-intégrale

Soit f une fonction continue et décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n, on a

$$f(n+1) \leq \int_{[n,n+1]} f \leq f(n)$$

   Donner un encadrement similaire lorsque f est supposée croissante.
2. En déduire un encadrement de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k)$ à l'aide d'intégrales.

Exercice 16

Soit f une fonction à valeurs réelles continue sur l'intervalle $[0;\pi]$, telle que

$$\int_0^{\pi} f(x)\,\sin x dx = \int_0^{\pi} f(x)\,\cos x dx = 0$$

Montrer que f s'annule au moins en deux points de l'intervalle $]0;\pi[$.

Fonctions définies par une intégrale

Exercice 17

On considère la fonction définie par

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$$

1. Donner le domaine de définition de F. Justifier que F est dérivable sur $\mathcal{D}_F$ et calculer sa dérivée.
2. Montrer que F est impaire.
3. Déterminer la monotonie de F.
4. En justifiant que $\forall t > 0$,
$$\frac{1}{1+t^2} \leqslant \frac{1}{t^2}$$
montrer que $\forall x \geqslant 1$, $\displaystyle\int_1^x \frac{dt}{1+t^2} \leqslant 1$.
5. En déduire que la fonction F admet une limite en $+\infty$. On note $L = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.
6. On pose $G(x) = F(x) + F(\frac{1}{x})$.
   (a) Justifier que G est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\times$ et calculer G'. Que dire de G ?
   (b) En faisant tendre x vers $+\infty$, montrer que $L = 2F(1)$.

Exercice 18

Soit $f : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{1+t^2}$. On considère les fonctions $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)dt$ et $G(x) = \displaystyle\int_{1/x}^x f(t)dt$

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Montrer que F est C^1 sur $\mathcal{D}_f$ et déterminer F'.
3. Montrer que G est C^1 sur $\mathcal{D}_f$. Déterminer G' et $G(1)$. En déduire G.

Calculs de primitives et d'intégrales

Exercice 19

Déterminer des primitives des fonctions données par les expressions suivantes :

1. $e^x \sin(e^x)$.
2. $\dfrac{2x+3}{(x^2+3x+7)^2}$.
3. $\dfrac{\ln x}{x}$.
4. $\cos^3 x$.
5. $\sin^2(x)\sin(2x)$.
6. $\operatorname{sh}^3 x$.
7. $\ln|x|$.
8. $|\ln x|$.
9. $\dfrac{\ln x}{x^2}$.
10. $(x^2+1)\exp x$.
11. $\operatorname{Arctan} x$.
12. $e^x \cos x$.
13. $e^x \sin x$.
14. $\dfrac{1}{\cos^5 x}$.

Exercice 20

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x)dx = \int_0^{\pi/4} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right)dx$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan x)dx$.

Exercice 21

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$$

1. Déterminer D, le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer $f'(x)$ pour $x \in D$.
3. En utilisant un développement limité de ln au voisinage de 1, montrer que
$$\frac{1}{\ln x} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} + o(1)$$
4. En déduire que les expressions $f'(x)$ et $\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}$ possèdent des limites finies à préciser lorsque x tend vers 1.
5. En considérant $f(x) - \ln(1+x)$, montrer que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \ln 2$.
6. Montrer que pour tout $x \in]0;1[$,
$$0 \leq f(x) \leq \frac{-x}{\ln x}$$
et en déduire que f admet un prolongement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1[$.

Exercice 22

Intégrales de Wallis

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer que pour tout $n \geq 2$, $nI_n = (n-1)I_{n-2}$.
3. En déduire des expressions de I_{2p} et I_{2p+1} à l'aide de factorielles.
4. Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.
5. En déduire que $I_{2p} \sim I_{2p+1}$ lorsque p tend vers $+\infty$, puis que $I_n \sim I_{n+1}$.
6. Montrer que $(n+1)I_nI_{n+1}$ est indépendant de n, et en déduire un équivalent simple de I_n
7. On a pu déjà montrer dans un précédent exercice qu'il existe une constante $\ell > 0$ telle que $n! \sim \ell\sqrt{n}\dfrac{n^n}{e^n}$. Montrer que $\ell = \sqrt{2\pi}$.
La formule $n! \sim \sqrt{2\pi n}\dfrac{n^n}{e^n}$ est appelée formule de Stirling

Formules de Taylor globales

Exercice 23

Soit $x \in \mathbb{R}$. On note $x^+ = \max(0, x)$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad \left| e^x - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \dfrac{e^{x^+}}{(n+1)!}|x|^{n+1}$
2. En déduire que $\quad \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x$

23.8 Exercices Complémentaires

Exercice 1

Etudier la monotonie des suites suivantes ($n \in \mathbb{N}^*$).

$$a_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx \qquad b_n = \int_0^{1/n} \frac{x}{1+x^3}dx \qquad c_n = \int_1^n (1-x)^3 e^x dx$$

Exercice 2

On pose pour tout ($n \in \mathbb{N}^*$), $I_n = \displaystyle\int_1^n \frac{x}{1+x^3}dx$

1. Déterminer la monotonie de la suite (I_n).
2. Montrer que $\forall x \in [1, +\infty[$, $\dfrac{1}{2x^2} \leqslant \dfrac{x}{1+x^3} \leqslant \dfrac{1}{x^2}$.
3. Montrer que la suite (I_n) est majorée.
4. Montrer que la suite $(I_n)_{n>0}$ est convergente et que $\dfrac{1}{2} \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} I_n \leqslant 1$.

Exercice 3

On pose, $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n e^t dt$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [0; 1]$, $0 \leqslant (1-t)^n e^t \leqslant e$
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{e}{n!}$
4. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
5. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I_n = I_{n-1} - \dfrac{1}{n!}$

Exercice 4

Soient x un réel positif. E étant la partie entière, calculer $\displaystyle\int_{[0;x]} E$.

Exercice 5

Trouver toutes les applications $f \in \mathcal{C}^0([0; 1], [0; 1])$ telles que

$$\int_{[0;1]} f = \int_{[0;1]} f^2$$

Exercice 6

Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \frac{dx}{\sqrt{n^2+x^3}} = 0$.

Exercice 7

Comment obtenir la meilleure approximation possible ?

Pour obtenir une valeur approchée de $I = \displaystyle\int_1^2 \ln(t)\,dt$ on dispose d'une table de logarithmes à 5 chiffres significatifs.

1. ***On utilise la méthode des rectangles.*** Évaluer, en fonction de n, l'erreur totale $\varepsilon_t = \varepsilon_m + \varepsilon_c$ due à la méthode et aux calculs.
   Pour quelle valeur de n cette erreur est-elle minimale ?
   Majorer cette erreur.
2. Même question en utilisant ***la méthode des trapèzes.***

$\boxed{\textbf{E}\text{xercice 8}}$

Calculer les limites éventuelles des suites $u = (u_n)$ définies par :

1. $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k^p}{n^{p+1}}$, $p \geq 0$
2. $u_n = \dfrac{1}{n^2} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k(n-k)}$
3. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2 + k^2}$
4. $u_n = \dfrac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots(2n)}$

