Chapitre 22

Matrices

22.1 Espace vectoriel $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$

- $\Big(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}),+,\cdot\Big)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel
- L'élément neutre est la matrice nulle
- Il est de dimension $n\times m$, de base canonique la famille $\Big(E_{p,q}\Big)_{\substack{1\leqslant p\leqslant m\\ 1\leqslant q\leqslant n}}$

$$\text{où}\qquad E_{p,q}=\Big(e_{i,j}\Big)_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}}\qquad\text{avec}\quad e_{i,j}=\delta_{i,p}\,\delta_{j,q}\quad(\text{voir}\,[1])$$

Test 591

Donner une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4 $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$. Donner une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 8 $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{C})$.

Test 592

Montrer que la famille $\left(\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&2\\1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7&5\\17&9\end{pmatrix}\right)$ est liée dans $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$

Th. ▷ **La transposition est une symétrie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$**

Ainsi on a les propriétés suivantes :

- $\forall\,A\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})\,,\quad\Big(A^T\Big)^T=A$
- $\forall\,A,B\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})\,,\quad(A+B)^T=A^T+B^T$
- $\forall\,A\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})\,,\ \forall\,\lambda\in\mathbb{K}\,,\quad(\lambda\,A)^T=\lambda\,A^T$

$$\text{Ainsi :}\quad\text{l'application}\begin{cases}\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})\\ A & \mapsto & A^T\end{cases}\quad\text{est linéaire}$$

Th. ▷ **SEV des matrices symétriques et antisymétriques**

Si $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$, alors les sous ensembles $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées d'ordre n, symétriques et antisymétriques sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$\boxed{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})=\mathcal{S}_n(\mathbb{K})\oplus\mathcal{A}_n(\mathbb{K})}$$

1. δ est le symbole de Kronecker.

22.2 Famille de vecteurs et application linéaire

Matrice d'une famille de vecteurs :
$\mathcal{B}=(e_1,\cdots,e_n)$ est une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E
$\mathcal{F}=(u_1,\cdots,u_p)$ est une famille de vecteurs de E.
La matrice de $\mathcal{F}$ relativement à $\mathcal{B}$ est

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \forall\, j \in [\![1,p]\!]\ ,\ u_j = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j}\, e_k$$

Th. ▷ **Matrice d'une application linéaire**

$\mathcal{B}=(e_1,\cdots,e_m)$ est une base du $\mathbb{K}$=espace vectoriel E
$\mathcal{C}=(f_1,\cdots,f_n)$ est une base du $\mathbb{K}$=espace vectoriel F
La matrice de $f\in\mathcal{L}(E,F)$ relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$
est la matrice de $f(\mathcal{B})$ relativement à $\mathcal{C}$, soit

$$\operatorname{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \forall\, j \in [\![1,m]\!]\ ,\quad f(e_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j}\, f_k$$

Th. ▷ **Matrice d'une application linéaire : calcul de l'image**

Soient $\overrightarrow{u}$ dans E et $\overrightarrow{u'}$ dans F, image de $\overrightarrow{u}$ par l'application linéaire f.

Notons $U_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ et $U_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ les coordonnées respectives de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

$$\boxed{\boxed{\operatorname{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\, U_{\mathcal{B}} = U_{\mathcal{C}}}}$$

le calcul : $\quad \forall\, i \in [\![1,n]\!]\ ,\ x'_i = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} a_{i,k}\, x_k$

Lorsque $E=F$, il est possible (mais pas obligatoire) de prendre $\mathcal{B}=\mathcal{C}$.
On note alors $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(f)$

Test 593

Soit f définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par $P(X) \mapsto \displaystyle\int_0^X P(t)\,dt$.
Quel est l'ensemble d'arrivée ?
Former la matrice de f dans les bases canoniques.

Test 594

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ de matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ dans la base (e_1, e_2).
Quelle est la matrice de f dans les bases

(e_2, e_1)? $(-e_1, e_2)$? $(e_1 + e_2, e_1 - e_2)$? $(e_1 + e_2, e_1 + 2\,e_2)$?

Test 595

$f \in \mathcal{L}(E)$ a pour matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ relativement à la base (i, j, k).
Déterminer l'image et le noyau de f.

Test 596

$f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ a pour matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ relativement à la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

- Calculer les images des vecteurs $u_1 = (1, -1, 1)$, $u_2 = (0, 1, 1)$, $u_3 = (2, 2, 1)$, $u_4 = (1, 0, -1)$, $u_5 = (1, 1, 1)$, $u_6 = (1, 2, 1)$.
- Repérer trois vecteurs u_i, $1 \leqslant i \leqslant 6$ tels que $\Big(u_i, f(u_i)\Big)$ est liée.
- Ces vecteurs forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?
  Dans l'affirmative, donner la matrice de f dans cette base.

Cas particuliers :

- ceci détermine une bijection fondamentale entre $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{L}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n)$
- et donc une bijection fondamentale entre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$
- ainsi qu'entre $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (matrices colonnes) et $\mathbb{K}^n$
- et entre $\mathcal{M}_{1,m}(\mathbb{K})$ (matrices lignes) et $(\mathbb{K}^m)^*$ (dual de $\mathbb{K}^m$)
- Addition :

  si $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ sont des bases de E, F de dimensions respectives m, n

$$\boxed{\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) + \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(g) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f + g)}$$

- Multiplication externe :

  si $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ sont des bases de E, F de dimensions respectives m, n

$$\boxed{\lambda\,\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\lambda\,f)}$$

- Composition :

  si $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ sont des bases de E, F, G de dimensions respectives p, n, m

$$\boxed{\mathrm{mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(f) \times \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(g) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(f \circ g)}$$

Th. ▷ **Isomorphisme d'espaces vectoriels entre $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{L}(E, F)$**

Si E et F sont deux $\mathbb{K}$=espaces vectoriels de dimensions respectives m et n, de bases respectives $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_m)$ et $\mathcal{C} = (f_1, \cdots, f_n)$ alors l'application :

$$\phi : \mathcal{L}(E, F) \to \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}),\ f \mapsto \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$$

est un isomorphisme.

Remarque : ceci prouve que $\dim\left(\mathcal{L}(E,F)\right) = \dim(E)\times\dim(F)$

- Cet isomorphisme permet de transformer à volonté un problème matriciel en un problème sur les applications linéaires (et inversement).

22.3 Matrices inversibles

22.3.1 Interprétations

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

- *par des applications linéaires*

$A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ $\qquad$ A inversible $\Leftrightarrow$ f bijective

- *par des familles de vecteurs*

$A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ $\qquad$ A inversible $\Leftrightarrow$ $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ est libre

22.3.2 Premières propriétés

Th. ▷ **Régularité et inversibilité**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

A est inversible à droite $\Leftrightarrow$ A est inversible à gauche $\Leftrightarrow$ A est inversible

$\Leftrightarrow$ A est régulière à droite $\Leftrightarrow$ A est régulière à gauche $\Leftrightarrow$ A est régulière

Conséquence :
on peut dire indifféremment A est **inversible** *ou A est* **réguliére**

Th. ▷ **Régularité d'un produit**

Pour toutes matrices carrées $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$A\,B$ est inversible $\Leftrightarrow$ A et B sont inversibles

(et, bien sûr : $(A\,B)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}$)

Test 597 En général, dans un anneau : $A\,B$ inversible $\not\Rightarrow$ A et B inversibles.
Fournissez un contre-exemple dans l'anneau des applications de $\mathbb{R}[X]$ muni des lois additives et de composition : on pourra penser aux applications dérivation et intégration.

22.3.3 Matrice de passage

La **matrice de passage** [2] de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$ est
la matrice des vecteurs de $\mathcal{B}'$ exprimés relativement à $\mathcal{B}$.

$$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(Id) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

où $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$

$\mathcal{B}' = (e'_1, \cdots, e'_n)$

et $\forall\, j \in [\![1, n]\!]$, $e'_j = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j}\, e_k$

2. On dit encore "matrice de changement de bases".

Important:

$$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}\,'} = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}\,') = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}\,',\mathcal{B}}(Id)$$

les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base $\mathcal{B}\,'$ exprimées dans l'ancienne base $\mathcal{B}$.

Propriétés :

- Une matrice de passage est régulière
- Réciproquement, toute matrice régulière est une matrice de passage
- $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}\,'} = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}\,',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)$
- changement de base inverse : $\boxed{\left(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}\,'}\right)^{-1} = P_{\mathcal{B}\,'}^{\mathcal{B}}}$
- double changement de base : $\boxed{P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}\,''} = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}\,'}\, P_{\mathcal{B}\,'}^{\mathcal{B}\,''}}$

Utilisation des matrices de passage

pour un vecteur :

$$\boxed{U' = P_{\mathcal{B}\,'}^{\mathcal{B}}\, U}$$

$\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}\,'$ bases de E
U matrice colonne du vecteur u relativement à $\mathcal{B}$
$U\,'$ matrice colonne du vecteur u relativement à $\mathcal{B}\,'$

pour une application linéaire :

$$\boxed{A_{\mathcal{C}\,'}^{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{C}\,'}^{\mathcal{C}}\, A_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}\, P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}\,'}}$$

$\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}\,'$ bases de E,
$\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}\,'$ bases de F,
A matrice de $f \in \mathcal{L}(E,F)$ relativement à $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$
$A\,'$ matrice de f relativement à $\mathcal{B}\,'$ et $\mathcal{C}\,'$

pour un endomorphisme :

$$\boxed{A_{\mathcal{B}\,'}^{\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}\,'}^{\mathcal{B}}\, A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\, P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}\,'}}$$

$\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}\,'$ bases de E
A matrice de $f \in \mathcal{L}(E)$ relativement à $\mathcal{B}$
$A\,'$ matrice de f relativement à $\mathcal{B}\,'$

Dire que deux matrices A et $A\,'$ sont des **matrices équivalentes** signifie qu'elles représentent la même application linéaire dans des bases différentes.

$$A\,' = P_{\mathcal{C}\,'}^{\mathcal{C}}\, A\, P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}\,'}$$

Test 598

Trouver une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la famille $\Big((1,2),(3,4)\Big)$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
Vérifier en utilisant la matrice de passage.

Test 599

$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ est la matrice de $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ relativement à la base canonique B.
Donner sa matrice relativement à la base

$$B' = (e_1, e_2, e_3) = \Big((1,0,-1),(0,1,1),(1,0,1)\Big)$$

Vérifier en calculant directement les images de e_1, e_2 et e_3 .

22.4 Rang d'une matrice

22.4.1 Définition

Pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on pose :

$$\text{Ker } A = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) | AX = 0_{n,1}\}$$
$$\text{Im } A = \{AX, X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})\}$$

Ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.
Quitte à identifier les matrices colonnes de taille p et n aux vecteurs de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$, on peut dire que Ker A et Im A sont le noyau et l'image de l'application linéaire canoniquement associée à A.

Point Méthode :

- Pour déterminer le noyau d'une matrice A, il suffit de résoudre le système correspondant à l'équation $AX = 0_{n,1}$.
- L'image d'une matrice A est le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs colonnes de A.
- Critère d'inversibilité : en particulier, pour montrer qu'une matrice carrée A est inversible, il suffit de montrer que l'équation $AX = 0$ admet comme unique solution $X = 0$.

Le **rang** de $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est
le rang dans $\mathbb{K}^m$ de la famille des vecteurs colonnes.

Notation : $\boxed{\text{rg}(A)}$

En fait, le rang de la matrice A est
- le rang de toute famille de vecteurs colonne qu'elle représente
- le rang de toute application linéaire qu'elle représente

Test 600 Quelle est la forme d'une matrice de rang 0 ? d'une matrice de rang 1 ?

Test 601 Déterminer le rang de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
A et B peuvent-elles représenter un même endomorphisme dans des bases différentes ?

22.4.2 Propriétés

- Si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, alors $\text{rg}(A) \leqslant \min(n, m)$
- La famille $(u_1, \cdots, u_n)$ est libre ssi $\text{rg}\left(\text{mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \cdots, u_n)\right) = n$
- Si $P \in GL_n(\mathbb{K})$, alors $\text{rg}(A) = \text{rg}(A\,P)$
- Si $Q \in GL_m(\mathbb{K})$, alors $\text{rg}(A) = \text{rg}(Q\,A)$

Une matrice particulière : la matrice $J_r \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

Elle est définie par $J_r = (\alpha_{i,j})$ où $\alpha_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leqslant i = j \leqslant r \\ 0 & \text{dans les autres cas} \end{cases}$

Soit[3] $J_r = E_{1,1} + \cdots + E_{r,r} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} I_r & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right)$

Il est clair que $0 \leqslant r \leqslant \min(n, m)$ et $\boxed{\operatorname{rg}(J_r) = r}$

Th. ▷ **Une caractérisation du rang**

La matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est de rang r ssi

$$\exists\, P \in GL_n(\mathbb{K}),\ \exists\, Q \in GL_m(\mathbb{K}), \quad A = Q\, J_r\, P$$

Th. ▷ **Conséquences de la caractérisation du rang**

— Des matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.
— Le rang d'une matrice est invariant par transposition

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^T)$$

— Le rang de A est donc aussi le rang de la famille des vecteurs ligne.

Test 602 Quel est le rang de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$?

22.4.3 Matrices extraites et rang

Une **matrice extraite** de $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est une matrice obtenue à partir de A en supprimant des lignes et/ou des colonnes. Elle lui est donc de dimensions inférieures ou égales.

Th. ▷ **Rang d'une matrice extraite**

Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est une matrice de rang r, alors toute sous-matrice extraite de A est de rang au plus r.

Th. ▷ **Caractérisation du rang par les matrices carrées extraites**

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Le rang de A est égal à r si et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées :

(1) il existe une matrice carrée d'ordre r inversible extraite de A,

(2) toute matrice carrée d'ordre $k > r$, extraite de A, est non inversible.

3. La matrice représentée ici est "horizontale" $(m < n)$ mais elle peut également être carrée ou "verticale" $(m > n)$.

22.4.4 Pivot de Gauss

Th. ▷ **Transformations élémentaires et rang**

Les transformations élémentaires ne changent pas le rang d'une matrice

Test 603 Respecte-t-on le rang en effectuant simultanément les transformations $C_1 \leftarrow C_1 + C_2$ et $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$?
Même question avec $C_1 \leftarrow C_1 - C_2$ et $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$

Lemme : Par des opérations élémentaires, toute matrice non nulle $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$

peut se transformer en $\left(\begin{array}{c|c} \alpha & \cdots \\ \hline 0 & \\ \vdots & A' \\ 0 & \end{array}\right)$ où $\alpha \neq 0$

Alors, nous avons : $\boxed{\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A') + 1}$

Th. ▷ **Méthode des pivots de Gauss**

Par une suite de transformations élémentaires, toute matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ peut se mettre sous la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_{1,n} \\ 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{r,r} & \cdots & \alpha_{r,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \prod_{k=1}^{r} \alpha_{k,k} \neq 0$$

$\boxed{A \text{ est alors de rang } r.}$

Test 604 Utiliser la technique du pivot de Gauss pour déterminer le rang de

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 11 & -2 & -1 & 8 & 5 \\ 7 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 4 & 3 \\ 9 & 2 & 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

22.5 Trace et matrices semblables

22.5.1 Matrices semblables

Définition (Matrices semblables)
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ deux matrices carrées. On dit que A est semblable à B si, et seulement si, il existe $P \in \mathcal{GL}_n(K)$ tel que

$$A = P^{-1}BP$$

Proposition
La relation de similitude (ie : le fait d'être semblable) est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(K)$

Proposition (Interprétation de la similitude matricielle)
E est un espace vectoriel de dimension n.
Deux matrices A_1 et $A_2 \in \mathcal{M}_n(K)$ sont semblables si, et seulement si, elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes, c'est-à-dire si, et seulement si, il existe $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ bases de E telles que

$$A_1 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u) \quad , \qquad A_2 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(u)$$

22.5.2 Trace d'une matrice

Définition (Trace d'une matrice carrée)
La trace d'une matrice carrée A, notée $\mathrm{Tr}(A)$, est la somme de ses coefficients diagonaux :

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}, \qquad A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n} \in \mathcal{M}_n(K)$$

Exemple : $\mathrm{Tr}(I_n) = n$.
Remarque : On a bien entendu $\mathrm{Tr}(\ A^T\ ) = \mathrm{Tr}(A)$.

Proposition
L'application trace est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(K)$, c'est-à-dire une application linéaire de $\mathcal{M}_n(K)$ dans K.

Proposition
Pour tout $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$, on a

$$\mathrm{Tr}(AB) = \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}} a_{i,j} b_{j,i}$$

En particulier,

$$\mathrm{Tr}(\ A^T\ A) = \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}} a_{i,j}^2$$

et, de plus

$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$$

Corollaire
Pour toute matrice inversible $P \in \mathcal{GL}_n(K)$, et toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$, on a

$$\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(PAP^{-1})$$

22.5.3 Trace d'un endomorphisme

Proposition
Deux matrices semblables ont même trace.

Proposition
La trace d'un endomorphisme est la trace de l'une de ses matrices relativement à une base donnée (cette trace ne dépendant pas de la base choisie).

Proposition (Linéarité de la trace)
L'application

$$\mathrm{Tr} : \mathcal{L}(E) \to K,\ u \mapsto \mathrm{Tr}(u)$$

est une forme linéaire, telle que pour tous u, $v \in \mathcal{L}(E)$,

$$\mathrm{Tr}(u \circ v) = \mathrm{Tr}(v \circ u)$$

Proposition (Trace d'un projecteur)
La trace d'un projecteur est égale à son rang.

22.6 Systèmes d'équations linéaires

Soit le système linéaire $AX = b$ à n équations et p inconnues. On reprend les notations usuelles.
▶ Le **rang** du système est le rang de sa matrice A. Notons-le r.

▶ **Conséquence pour un système homogène**

Le système admet pour ensemble de solutions $\operatorname{Ker}(A)$ qui est un espace vectoriel de dimension $p - r$.

▶ **Conséquence pour un système compatible**

l'ensemble des solutions est l'espace affine [4] de direction $\operatorname{Ker}(A)$:

$$x_0 + \operatorname{Ker}(A) \quad \big(x_0 \text{ solution particulière du système}$$

▷ cet espace est de dimension $p - r$, où r est le rang du système.

▷ Le système sera compatible si et seulement si $b \in Im(A)$

▶ **Conséquence pour un système carré de rang n**

Si A est carrée de rang n, autrement dit inversible, il y a une unique solution qui vaut $A^{-1}b$. On rappelle que ce type de système est dit de Cramer.

Test 605

Soit f de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ relativement à la base (e_1, e_2, e_3) .

- Calculer $f(e_1 + 2e_2 - 2e_3)$, $f(-e_2 + e_3)$, $f(-2e_1 - 2e_2 + 3e_3)$
- En déduire les solutions de $\begin{cases} x + 2y + 2z = 1 \\ 2x + y + 2z = 1 \\ y + z = 1 \end{cases}$

22.7 Exercices

Calcul Matriciel

Exercice 1

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que f est un projecteur, et donner des bases de ses directions propres.

Exercice 2

Soit E l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ de la forme

$$\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

1. Montrer que E est un SEV de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
2. Donner une base du sous-espace vectoriel E.
3. Montrer que E est un sous-anneau de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
4. L'anneau E est-il intègre ? Est-il commutatif ?
5. Quel sont les éléments inversibles de E. Leur inverse est-il dans E ?

Exercice 3

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$\frac{5}{2}A^{2014} + \frac{3}{2}A^{2013} + \frac{1}{2}A^{2012} + 2I_n = 0$$

Montrer que A est inversible.

Exercice 4

1. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Montrer que $A^2 - \mathrm{Tr}(A)A + (\mathrm{Det}\, A)I_2 = 0_2$ avec $\mathrm{Det}\, A = a_{1,1} \times a_{2,2} - a_{1,2} \times a_{2,1}$.
2. Calculer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 2X + 1$.
3. On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^n

Exercice 5

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & -8 \\ 3 & 6 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Déterminer une base de Ker A et Im A.

Exercice 6

Résoudre les systèmes suivants, de paramètre a.

$$(S1) \begin{cases} 2x + 3y - z = -1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ 3x + 4y - 5z = -4 \end{cases} \qquad (S2) \begin{cases} x + 2y + az = 0 \\ x - ay + z = 1 \\ ax - 2y + z = a \end{cases}$$

Exercice 7

Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Résoudre l'équation $X + \mathrm{Tr}(X)A = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Matrices, changements de base

Exercice 8

Déterminer la matrice de l'application $\mathbb{R}$-linéaire de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, qui à z associe $\overline{z}$ dans la base $(1, i)$ puis dans la base $(1, j)$.

Exercice 9

Soit f la symétrie de $\mathbb{R}^2$ par rapport à la droite $y = x$, parallèlement à la droite $y = -x$.

1. Déterminer, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ l'expression de $f(x, y)$ et en déduire la matrice A de f dans la base canonique.
2. Déterminer sans calculs la matrice A' de f dans la base $\mathcal{B}' = \big((1, 1),\ (1, -1)\big)$.
3. Déterminer la matrice P de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}'$, ainsi que son inverse.
4. Vérifier la formule $A = P\,A'\,P^{-1}$ vue en cours.

Exercice 10

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, et (e_1, e_2, e_3) une base de E.

1. Soit $f_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $f_2 = e_1 + e_2$ et $f_3 = e_1 + e_3$. Justifier que (f_1, f_2, f_3) est une base de E.
2. On note P la matrice de passage de (e_1, e_2, e_3) à (f_1, f_2, f_3). Déterminer P et P^{-1}.
3. Soit u la projection sur $\mathrm{Vect}(f_1, f_2)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(f_3)$. Déterminer la matrice M_1 de u dans la base (f_1, f_2, f_3).
4. En déduire la matrice M_2 de u relativement à la base (e_1, e_2, e_3).

Exercice 11

Soit l'application

$$\Phi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X],\ P \mapsto P - (4X + 1)P'$$

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la matrice M de Φ relativement à la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Résoudre l'équation $\Phi(P) = \lambda P$ d'inconnue $(\lambda, P) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_2[X]$.
4. En déduire une base $\mathcal{B}' = (P_1, P_2, P_3)$ dans laquelle la matrice M' de Φ est diagonale.

5. Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
6. Calculer M'^n pour $n \in \mathbb{N}$.
7. En déduire M^n

Rang

Exercice 12

Déterminer le rang des matrices suivantes :

1. $A = \left(e^{i-j}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$.
2. $B = \left(\sin(i+j)\right)_{1 \leq i,j \leq n}$.
3. $C = \left(i+j\right)_{i \leq i,j \leq n}$
4. $D_{a,b} = (d_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ où $d_{i,j} = \begin{cases} a \text{ si } i = j \\ b \text{ si } i \neq j \end{cases}$.

Exercice 13

Déterminer le rang des matrices suivantes M.

1. $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
2. $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
3. $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

22.8 Exercices Complémentaires

Exercice 1

Déterminer, dans $\mathbb{R}^3$, la matrice M canoniquement associée à la projection sur la droite engendrée par $(1,1,1)$ parallèlement au plan d'équation $x - y + z = 0$.

Exercice 2

Centre de $\mathcal{M}_n(K)$
Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ commutant avec toutes les matrices $B \in \mathcal{M}_n(K)$.
Montrer que A est une matrice scalaire (c'est-à-dire est un multiple scalaire de I_n).
Indication : prendre $B = E_{i,j}$.

Exercice 3

Matrices à diagonale strictement dominante
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que pour tout $i \in [\![1;n]\!]$

$$|a_{i,i}| > \sum_{k \neq i} |a_{i,k}|$$

Montrer que A est inversible (on calculera son noyau).

Exercice 4

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une telle que $M^n = 0_n$.
Montrer que $I_n - M$ est inversible, et en déterminer l'inverse.

Exercice 5

Les matrices triangulaires strictes sont nilpotentes
On fixe n un entier une fois pour toutes. On considère des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On note, pour $0 \leq k \leq n-1$, $T_{k,n}(\mathbb{K})$ l'espace vectoriels des matrices A triangulaire supérieures, ayant k "sur-diagonales" nulle, c'est-à-dire telle que $a_{i,j} = 0$ si $i \geq j - k$. Par exemple, $T_{0,n}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices triangulaires supérieures, $T_{1,n}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices triangulaires supérieures strictes...

1. Soit $M_1 \in T_{k_1,n}$ et $M_2 \in T_{k_2,n}$. Montrer que $M_1M_2 \in T_{k_1+k_2,n}$.
2. En déduire que toute matrice triangulaire supérieure stricte est nilpotente.

Exercice 6

Dans $E = \mathbb{R}^3$, on note (e_1, e_2, e_3) la base canonique. Puis on pose $f_1 = e_2 + e_3$, $f_2 = e_1 + e_3$ et $f_3 = e_1 + e_2$.

1. Justifier que (f_1, f_2, f_3) est une base de E.
2. Déterminer dans la base (f_1, f_2, f_3) la matrice A de l'application dont la matrice dans la base canonique de E est $B = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Calculer A^n, et en déduire B^n.

Exercice 7

Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, on considère la base canonique $\mathcal{B} = (i, j, k)$ où $i = (1, 0, 0)$, $j = (0, 1, 0)$ et $k = (0, 0, 1)$, et l'endomorphisme f dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix}$$

On pose $u = i + j + 2k$, $v = 3j + 2k$ et $\mathcal{B}' = (u, v, k)$.

1. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de E et déterminer P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
2. Calculer P^{-1}.
3. Déterminer la matrice T de f dans la base B'.
4. Calculer T^n.
5. En déduire une expression de A^n à l'aide de n, I_3, A et A^2.

$\boxed{\textbf{E}\text{xercice 8}}$

Inverser les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \cdots & & a_2 & 0 \\ \vdots & & . & & \vdots \\ \vdots & . & & & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } \forall i \in [\![1; n]\!],\ a_i \neq 0$$

$\boxed{\textbf{E}\text{xercice 9}}$

Trace d'une matrice carrée ***Un grand classique à connaître...***

La trace de la matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la quantité $\operatorname{tr}(A) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{k,k}$

1. Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, montrer que $\operatorname{tr}(A\,B) = \operatorname{tr}(B\,A)$.
2. A-t-on $\operatorname{tr}(A\,B) = \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)$?
3. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, et A et B la matrice de f relativement à deux bases différentes. Montrer que $\operatorname{tr}(A)$ =$\operatorname{tr}(B)$.

Conclusion : cette quantité ne dépend que de f. C'est la "trace de f".