Chapitre 19

Applications linéaires

19.1 Applications linéaires

19.1.1 Définitions

Une **application linéaire** est un **morphisme d'espaces vectoriels** .
Plus précisément,
si $\left(E,+,\cdot\right)$ et $\left(F,+,\cdot\right)$ [1] sont deux espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$,
$f : E \to F$ est linéaire si et seulement si

- $\forall\, x, y \in E, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$
- $\forall\, x \in E,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda\, x) = \lambda\, f(x)$

Nous écrirons $\boxed{f \in \mathcal{L}(E,F)}$ ou encore $\boxed{f \in \mathcal{L}(E)}$ si $E = F$.

L'application linéaire f est un **endomorphisme** si $E = F$
un **isomorphisme** si f est bijective
un **automorphisme** si $E = F$ et f est bijective
une **forme linéaire** si $F = \mathbb{K}$

Exemples

Les applications suivantes sont des applications linéaires classiques :
L'application nulle $u \mapsto 0$
L' **homothétie vectorielle de rapport λ** $u \mapsto \lambda\, u \quad (\lambda \neq 0)$
La $k^{\text{ème}}$ projection $p_k : \begin{cases} \mathbb{K}^n & \to \quad \mathbb{K} \\ (x_1, \cdots, x_k, \cdots, x_n) & \mapsto \quad x_k \end{cases}$
La dérivation de $\mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ vers $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ (valable aussi avec $\mathbb{C}$)

L'application identique $Id : u \mapsto u$ est un endomorphisme d'espace vectoriel.

Test 529

Dire pourquoi les applications suivantes ne sont pas linéaires :
(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $f(x) = x^2$
(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $f(x) = x + 1$
(3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $f(x) = \sin x$
(4) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ avec $f(x,y) = x \cdot y$
(5) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ avec $f(x) = 2\,x$

Test 530

Les applications suivantes sont-elles linéaires ?
(1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ avec $f(x,y) = (2\,x\,,\,0\,,\,x - 3\,y)$
(2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ avec $f(x,y) = (2\,x\,,\,y + 1)$
(3) $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ avec $f(P) = P(-1)$ (valeur de P pour $x = -1$)
(4) $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ avec $f(a\,X^2 + b\,X + c) = c\,X^3 - b$

1. **Attention aux notations :** il serait plus correct d'utiliser des notations différentes pour les lois des deux espaces vectoriels. Conformément à l'usage, on utilise les même symboles, mais il convient de rester vigilant et de se poser la question : "dans quel espace se trouve-t-on ?"

19.1.2 Premières propriétés

Th. ▷ **Caractérisation d'une application linéaire**

E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
$f : E \to F$ est linéaire si et seulement si

$$\forall\, u, v \in E, \quad \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda\, u + \mu\, v) = \lambda\, f(u) + \mu\, f(v)$$

Note : on peut limiter la condition à un seul scalaire
$\forall (u, v, \lambda) \in E^2 \times \mathbb{K}, \quad f(u + \lambda\, v) = f(u) + \lambda\, f(v)$

Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors

- $f(0_E) = 0_F$
- $\forall\, u_1, u_2, \cdots, u_n \in E, \forall\, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \quad f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, u_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \Big(\lambda_k\, f(u_k)\Big)$

19.1.3 Composition d'applications linéaires

Si E, F et G sont trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, alors

$$f \in \mathcal{L}(E, F) \text{ et } g \in \mathcal{L}(F, G) \;\Rightarrow\; g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$$

Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, alors

$$f \in \mathcal{L}(E, F) \text{ bijective } \;\Rightarrow\; f^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$$

Linéarité de $f \mapsto u \circ f$ et de $f \mapsto f \circ u$:

- Soit $f, g \in \mathcal{L}(E, F), u \in \mathcal{L}(F, G)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
  Alors $\quad u \circ (f + \lambda\, g) = u \circ f + \lambda\, u \circ g$
- Soit $u \in \mathcal{L}(E, F), f, g \in \mathcal{L}(F, G)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
  Alors $\quad (f + \lambda\, g) \circ u = f \circ u + \lambda\, g \circ u$

Notes :
Dans ce dernier cas, la linéarité de u est inutile.
Dans les deux cas, la linéarité de f et g est inutile.
(*Il suffit que les opérations* $f + g$ et $\lambda\, g$ *aient un sens.*)
On peut dire que $\circ$ est **distributive à droite** par rapport à "+".

Le **groupe linéaire** $\mathrm{GL}(E)$ [2]

Muni de la loi $\circ$ de composition des applications, l'ensemble des automorphismes du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E a une structure de groupe non abélien.

C'est le groupe linéaire de E.

19.1.4 Structure de $\mathcal{L}(E, F)$ et de $\mathcal{L}(E)$

Si $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ alors

- $f + g \in \mathcal{L}(E, F)$ (la somme de deux AL est une AL.)
- $\forall\, \lambda \quad \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda\, f \in \mathcal{L}(E, F)$ (le produit d'une AL par un scalaire est une AL)

Th. ▷ **Structures de $\mathcal{L}(E, F)$ et de $\mathcal{L}(E)$**

E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

- $\mathcal{L}(E, F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (pour les lois $+$ et $\cdot$)
- $\mathcal{L}(E)$ est un anneau non commutatif, non intègre (pour les lois $+$ et $\circ$)
- $\mathcal{L}(E)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre (pour les lois $+$, $\circ$ et $\cdot$)

Intérêt : A condition de ne pas changer l'ordre ni de simplifier,
ceci permet de faire du calcul sur les applications linéaires
pratiquement comme du calcul dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

2. L'étude générale du groupe linéaire est hors programme

Test 531

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^{\,2} = f + \mathrm{Id}$.
Montrer que f est bijective et calculer f^{-1} en fonction de f et Id.
(on écrira la condition sous la forme $f \circ g = g \circ f = \mathrm{Id}$)
Adapter ce test dans le cas $f^{\,3} = (f + 2\,\mathrm{Id})^{\,2}$

Test 532

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^{\,2} = \mathrm{Id}$.
(1) Peut-on utiliser le binôme de Newton pour calculer $(f + \mathrm{Id})^{\,n}$?
(2) En déduire $\forall\, n \in \mathbb{N},\quad n \geqslant 2 \Rightarrow (f + \mathrm{Id})^{\,n} = 2^{n-1}(f + \mathrm{Id})$
(3) Retrouver ce résultat en utilisant une démonstration par récurrence.

19.1.5 Intérêt de ces structures

Ces structures permettent de travailler avec des endomorphismes et les opérations "$+\,,\ \cdot\,,\ \circ$" un peu comme on travaille avec des réels et les opérations "$+\,,\ \underbrace{\cdot\,,\ \times}_{\text{c'est le produit}}$.

Attention toutefois :

▶ ***on ne peut généralement pas commuter***
(puisque la loi $\circ$ n'est pas commutative)

▶ Il faut rester très prudent avec la loi $\circ$ si ce ne sont pas des endomorphismes

Réfléchir à ce qui suit . . .

▷ Dans $\mathbb{R}$ nous avons $(a + 2\,b) \times (3\,a + 4\,c) = 3\,a^{\,2} + 4\,a\,c + 6\,b\,a + 8\,b\,c$
$= 3\,a^{\,2} + 4\,a\,c + 6\,a\,b + 8\,b\,c$
Et dans $\mathcal{L}(E)$: $(f + 2\,g) \circ (3\,f + 4\,h) = 3\,f^{\,2} + 4\,f \circ h + 6\,g \circ f + 8\,g \circ h$
mais attention $\neq 3\,f^{\,2} + 4\,f \circ h + 6\,f \circ g + 8\,g \circ h$

▷ Dans $\mathbb{R}$ nous avons $(a + b)^{\,2} = a^{\,2} + 2\,a\,b + b^{\,2}$
Et dans $\mathcal{L}$(E) : $(f + g)^{\,2} = f^{\,2} + f \circ g + g \circ f + g^{\,2}$
ne pas écrire $f^{\,2} + 2\,f \circ g + g^{\,2}$
par contre $(f + \mathrm{Id}_E)^{\,2} = f^{\,2} + 2\,f + \mathrm{Id}_E$ ***est correct***

▷ Dans $\mathbb{R}$ nous avons $a\,b + a = a\,(b + 1)$ (d'où vient le $\mathbf{1}$?)
Et dans $\mathcal{L}(E)$: $f \circ g + f = f \circ \big(g + \,?\big)$ (voir [3])

▷ Dans $\mathbb{R}$ nous avons pour $a \neq 0$: $a\,b = a\,c \Rightarrow b = c$
Et dans $\mathcal{L}(E)$, ***attention*** en général $f \circ g = f \circ h \not\Rightarrow g = h$
même si $f \neq \mathbf{0}$ (fonction nulle).
Quelle hypothèse sur f faut-il pour que l'implication soit vraie ? (voir [4])

Test 533

Dans $\mathcal{L}(E)$, développer $(f + g) \circ (f - g)$ puis $(f + 2\,\mathrm{Id}_E) \circ (f - 2\,\mathrm{Id}_E)$.

Test 534

Dans $\mathbb{R}$ nous avons $a\,b = 1 \Rightarrow a = \dfrac{1}{b}$. Que devient ceci dans $\mathcal{L}(E)$?

Test 535

Une technique classique à connaître :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ qui vérifie $f^{\,2} + 3\,f - \mathrm{Id}_E = \mathbf{0}$ (application nulle).
Montrer que f admet une application réciproque qu'on explicitera.
Même question si f vérifie $f^{\,2} + 2\,f = f^{\,3} - 3\,\mathrm{Id}_E$.

19.1.6 Image directe et réciproque de SEV

Th. ▷ **Image directe et réciproque d'un SEV**

3. $\mathbf{1}$ est l'élément neutre pour $\times$. Le point d'interrogation est le neutre pour $\circ$, c'est-à-dire $\mathrm{Id}_{\,E}$.

4. Dans $\mathbb{R}$, on simplifie par a en multipliant par $\dfrac{1}{a}$ (qui existe si $a \neq 0$). L'implication sera vraie dans $\mathcal{L}(E)$ si $f^{\,-1}$ existe, c'est-à-dire si f est bijective.

E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
- $\forall A \quad A$ **SEV** de $E \Rightarrow f(A)$ **SEV** de F
  (par une application linéaire, l'image d'un SEV est un SEV)
- $\forall B \quad B$ **SEV** de $F \Rightarrow \overset{\vee}{f}(B)$ **SEV** de E
  (par une application linéaire, l'image réciproque d'un SEV est un SEV)

Cas particuliers importants :
- Le **noyau** de f : $\quad \operatorname{Ker}(f) = \left\{ u \in E \mid f(u) = 0_F \right\}$
  - $\operatorname{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E
  - $\boxed{f \text{ est injective ssi } \operatorname{Ker}(f) = \left\{ 0_E \right\}}$
- L'**image** de f : $\quad \operatorname{Im}(f) = \left\{ v \in F \mid \exists\, u \in E,\ v = f(u) \right\}$
  - $\operatorname{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F
  - f est surjective ssi $\operatorname{Im}(f) = F$

Th. ▷ **Famille génératrice et application linéaire**

Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de E et si $f \in \mathcal{L}(E,F)$, alors
$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}(f(x_i), i \in I)$

Test 536

Les applications suivantes sont linéaires. Déterminer l'image, le noyau, et dire si l'application est injective ou surjective :
(1) $\quad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = (x+y, x-y)$
(2) $\quad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ f(x,y) = (x, x+y, y)$

Test 537

Déterminer un endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ pour lequel

$$\operatorname{Im}(f) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y \right\} \quad \textit{et} \quad \operatorname{Ker}(f) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \right\}$$

19.1.7 Équations linéaires

Équation linéaire (cas général) :
- c'est une équation de la forme $f(x) = b$ où $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $b \in F$
- si $\mathcal{S} = \left\{ u \in E \mid f(u) = b \right\}$ désigne l'ensemble des solutions :
  - soit $\mathcal{S} = \varnothing \qquad$ (si $b \notin \operatorname{Im}(f)$)
  - soit $\mathcal{S} \neq \varnothing$. Alors $\mathcal{S}$ est un sous-espace affine de E de direction $\operatorname{Ker}(f)$

$$\mathcal{S} = x_0 + \operatorname{Ker}(f) \quad \text{où} \quad x_0 \in \mathcal{S} \ \text{ est une solution particulière.}$$

Test 538

Trouver la solution u_0 de la forme $(x, 0)$ du système $\begin{cases} 4\,x + 6\,y = 2 \\ 6\,x + 9\,y = 3 \end{cases}$

Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $\varphi(x,y) = (4\,x + 6\,y, 6\,x + 9\,y)$
En déduire toutes les solutions du système.

Équation différentielle linéaire
- C'est une équation différentielle de la forme $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = b(x)$
  où $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ et b sont des fonctions continues sur l'intervalle I.

- Cette équation entre dans le cadre général des équations linéaires ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) :

$$\varphi(y) = b \quad \text{où} \quad \varphi : \begin{cases} \mathcal{D}^n(I, \mathbb{K}) & \to \quad \mathcal{F}(I, \mathbb{K}) \\ y & \mapsto \quad y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y \end{cases}$$

- Voir le cours d'analyse pour les équations linéaires, soit d'ordre 1, soit d'ordre 2 à coefficients constants

Suites récurrentes (u_n) **telles que** $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = a\, u_{n+1} + b\, u_n$
Notons Δ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des suites à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$ $(\Delta = \mathbb{K}^{\mathbb{N}})$.
- Les suites u recherchées sont les solutions de l'équation linéaire :

$$\varphi(u) = 0_\Delta \quad \text{où} \quad \varphi \begin{cases} \Delta & \to \quad \Delta \\ (u_n) & \mapsto \quad (v_n) \end{cases}$$

avec $\forall\ n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{n+2} - a u_{n+1} - b u_n$

19.2 Applications linéaires et bases

19.2.1 Détermination d'une application linéaire

Th. ▷ **Détermination par l'image d'une base**

E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels,
$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est une base de E.
Pour toute famille $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ de vecteurs de F, il existe une application linéaire φ et une seule qui vérifie $\forall\ k \in [\![1, n]\!]$, $\varphi(e_k) = v_k$

On résume en $\boxed{\text{Une application linéaire est déterminée par l'image d'une base}}$

19.2.2 Expression analytique

Si de plus $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, \cdots, f_m)$ est une base de F, chaque vecteur $f(e_k)$ est déterminé par ses coordonnées $\begin{pmatrix} a_{1,k} \\ a_{2,k} \\ \vdots \\ a_{m,k} \end{pmatrix}$ relatives à $\mathcal{B}'$.

Alors, l'image du vecteur $u = \sum_{k=1}^{n} x_k\, e_k$ est le vecteur $u' = f(u) = \sum_{i=1}^{m} x'_i\, f_i$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} x'_1 = a_{1,1}\, x_1 + a_{1,2}\, x_2 + \cdots + a_{1,n}\, x_n \\ x'_2 = a_{2,1}\, x_1 + a_{2,2}\, x_2 + \cdots + a_{2,n}\, x_n \\ \cdots\cdots\cdots \\ x'_m = a_{m,1}\, x_1 + a_{m,2}\, x_2 + \cdots + a_{m,n}\, x_n \end{cases}$$

c'est-à-dire $\boxed{\forall\ i \in [\![1, m]\!], \quad x'_i = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\, x_k}$

Th. ▷ **Autre caractérisation d'une application linéaire**

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, \cdots, f_m)$ sont des bases des deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F.
$f : E \to F$ est linéaire <u>ssi</u> son expression analytique est de la forme

$$u \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto f(u) \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}\,x_1 + a_{1,2}\,x_2 + \cdots + a_{1,n}\,x_n \\ a_{2,1}\,x_1 + a_{2,2}\,x_2 + \cdots + a_{2,n}\,x_n \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{m,1}\,x_1 + a_{m,2}\,x_2 + \cdots + a_{m,n}\,x_n \end{pmatrix}$$

Test 539

Dans $\mathbb{R}_2[X]$ rapporté à sa base canonique, donner l'expression analytique de f qui, à $P(X)$ associe $\Big(P'(X)\Big)^2$. f est-elle linéaire ?

Test 540

$\mathcal{B} = \Big(i, j\Big) = \Big((1,2),(2,1)\Big)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Dans cette base, l'endomorphisme f a pour expression analytique $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + 2\,y \end{cases}$

Calculer l'image des couples −**1**− $(1,2)$ −**2**− $(2,1)$ −**3**− $(3,3)$

19.2.3 Matrices d'application linéaire

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est une base de E, et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, \cdots, f_m)$ une base de F.
Toute application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est déterminée par les n vecteurs $\Big(f(e_k)\Big)_{1\leqslant \leqslant n}$ eux-mêmes déterminés par leurs coordonnées $\Big(a_{i,k}\Big)_{1\leqslant i\leqslant m}$ relativement à $\mathcal{B}'$.

$$M = \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \end{array}$$

Notes :
- si $n = m$, on dit que la matrice est carrée.
- Si $E = F$, il est possible d'utiliser la même base dans l'espace de départ et d'arrivée. On écrira alors $\boxed{M = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f)}$.

Test 541

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ relativement à la base $\mathcal{B} = (i,j)$ de E.

Écrire les expressions analytiques de f et $f \circ f$ relativement à cette base.

Notation :

- on écrit les coordonnées d'un vecteur sous la forme d'une matrice colonne

$$u \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad u' \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x'_m \end{pmatrix}$$

- On écrit l'égalité $f(u) = u'$ sous la forme d'un **produit matriciel**

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x'_m \end{pmatrix}$$

19.2.4 Bases et injections - surjections

Th. ▷ **injections-surjections et image d'une base**

$f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{B} = \left(e_1, e_2, \cdots, e_n\right)$ est une base de E.

- f est injective $\Leftrightarrow f(\mathcal{B})$ est une famille libre de F
- f est surjective $\Leftrightarrow f(\mathcal{B})$ est une famille génératrice de F
- f est bijective $\Leftrightarrow f(\mathcal{B})$ est une base de F

Test 542 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ qui à $P(X)$ associe $(X+1)\,P'(X)$.
Utiliser l'image de la base canonique pour déterminer si f est injective ou surjective.

19.2.5 Utilisation de SEV supplémentaires

Th. ▷ **SEV supplémentaires et applications linéaires**

Soit E_1, E_2 des SEV de E tels que $E = E_1 \oplus E_2$.
Soient $u_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$ et $u_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$.
Il existe une unique application $u \in \mathcal{L}(E, F)$ coïncidant avec u_1 sur E_1 et u_2 sur E_2.

19.3 Projections, symétries, homothétie

19.3.1 Projection vectorielle

A et B sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E : $E = A \oplus B$ Tout vecteur $u \in E$ admet une unique décomposition $u = a + b$, $(a, b) \in A \times B$.

Le **projecteur** (ou **projection**) sur A de direction [5] B est l'application

$$p : \begin{cases} E = A \oplus B & \to & E \\ u = a + b & \mapsto & p(u) = a \end{cases} \qquad (a, b) \in A \times B$$

A est la **base** de la projection
B est la **direction** de la projection

Propriétés :

- p est une application linéaire
- A est l'ensemble des vecteurs invariants

$$\boxed{\mathrm{A} = \left\{ u \in E \ | \ p(u) = u \right\} = \mathrm{Ker}\,(\text{p-Id})}$$

- $A = \mathrm{Im}\,(p)$ et $B = \mathrm{Ker}\,(p)$
- p est **idempotente** $p \circ p = p$

Test 543 Montrer que $A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ | \ y = 0 \right\}$ et $B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ | \ x = y \right\}$ sont deux espaces supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.
Former les expressions analytiques de p projection sur A de direction B, et de q projection sur B de direction A.

Th. ▷ **Caractérisation des projecteurs**

Soit l'application $p : E \to E$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel :

p est un projecteur $\Leftrightarrow$ p est linéaire et idempotente

Test 544 Montrer que $p : (x, y, z) \mapsto (x - z, y - z, 0)$ est un projecteur de $\mathbb{R}^3$ dont on précisera les éléments.

Test 545 Si p est un projecteur, montrer que $s = 2\,p - \mathrm{Id}$ est linéaire involutive.
Que pensez-vous de la réciproque ?

Test 546 Pour quelle valeur du paramètre réel a l'application de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même définie par $f(x, y) = \Big((a + 1)\,x - a\,y\,,\, 3\,x - 2\,y \Big)$ est-elle une projection ?
Précisez-en alors les éléments.

Méthodes

- Pour reconnaître un projecteur :
  - Utiliser principalement "linéaire idempotente"
  - Éventuellement utiliser directement la définition
- Pour en déterminer les éléments
  - Chercher invariants et noyau
  - Éventuellement, utiliser l'image
- Pour obtenir l'expression analytique
  - Utiliser une base de A : ces vecteurs sont invariants
    Utiliser une base de B : ces vecteurs ont pour image 0
    Résoudre le système vectoriel

5. On peut dire aussi "parallèlement à".

Test 547

$\mathcal{B} = (i, j, k)$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. On se propose de déterminer l'expression analytique de la projection p sur le plan d'équation $x + z = 0$, de direction la droite D engendrée par $w = j + k$.
- Trouver une base (u, v) du plan P.
- Sans calculs, donner les images par p de u, v, w en fonction de u, v et w.
- Traduire ces égalités dans la base $\mathcal{B}$ et en déduire l'expression analytique de p.

19.3.2 Symétries vectorielles

A et B sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E : $E = A \oplus B$ Tout vecteur $u \in E$ admet une unique décomposition $u = a + b$, $(a, b) \in A \times B$.

La **symétrie** par rapport à A de direction[6] B est l'application

$$s : \begin{cases} E = A \oplus B & \rightarrow & E \\ u = a + b & \mapsto & s(u) = a - b \end{cases} \qquad (a, b) \in A \times B$$

A est la **base** de la symétrie
B est la **direction** de la symétrie

Propriétés :

- s est une application linéaire
- A est l'ensemble des vecteurs invariants

$$\boxed{\mathrm{A} = \left\{ u \in E \mid s(u) = u \right\} = \mathrm{Ker}\,(\text{s-Id})}$$

- B est l'ensemble des vecteurs transformés en leur opposé

$$\boxed{\mathrm{B} = \left\{ u \in E \mid s(u) = -u \right\} = \mathrm{Ker}\,(\text{s+Id})}$$

- s est **involutive** $\quad s \circ s = \mathrm{Id}$

Test 548

Reprendre le premier test du paragraphe 19.3.1 et donner l'expression analytique des deux symétries vectorielles

Th. ▷ **Caractérisation des symétries**

soit l'application $s : E \rightarrow E$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel :
s est une symétrie $\Leftrightarrow$ s est linéaire et involutive

Test 549

Montrer que $s(x, y, z) = (-2x + 2y + z\,,\ -x + y + z\,,\ -x + 2y)$ est une symétrie de $\mathbb{R}^3$ dont on précisera les éléments.

Test 550

Adapter le dernier test du paragraphe 19.3.1 aux symétries.

19.3.3 Homothétie vectorielle

L' **homothétie** vectorielle de rapport k est l'application de E dans E définie par $\overrightarrow{u} \mapsto k\overrightarrow{u}$

On peut la noter $k\,\mathrm{Id}_E$.

Remarques

- Une homothétie vectorielle est un endomorphisme de E.
- L'identité est une homothétie de rapport 1
- Si $k \neq 0$, une homothétie est bijective
- L'application réciproque est l'homothétie de rapport $\dfrac{1}{k}$.
- Muni de la loi $\circ$, l'ensemble des homothétie de rapport non nul est un groupe commutatif.

6. On peut dire aussi "parallèlement à".

19.4 Exercices

Exercice 1

Les applications suivantes $E \to F$ sont-elles linéaires ? Justifiez votre réponse. Lorsque c'est le cas, déterminer leur noyau et leur image.

1. $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \mapsto (x + y, z + x)$
2. $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y) \mapsto (x + y, y + 2x, 2y + x)$
3. $r : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x, x + y, y - x) \mapsto (x, y)$
4. $D : E \to F,\ f \mapsto f'$, avec $E = \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}),\ F = \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.
5. $X : E \to E,\ f \mapsto (g_f : x \mapsto xf(x))$, avec $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 2

Soient E et F deux K-espaces vectoriels.

1. Soient U_1 et U_2 deux sous-espaces supplémentaires dans E ($U_1 \oplus U_2 = E$). Soit u_1 une application linéaire de U_1 dans F, et u_2 une application linéaire de U_2 dans F. Montrer qu'il existe une unique application linéaire u de E dans F telle que $u_{|U_1} = u_1$ et $u_{|U_2} = u_2$.
2. Soit H un sous-espace vectoriel de E et f un endomorphisme de E. On dit que H est un sous-espace stable par f si $f(H) \subset H$, c'est-à-dire si $f(x) \in H$ pour tout $x \in H$. Soient f et g deux endomorphismes de E.
   (a) On suppose que f et g commutent ($g \circ f = f \circ g$). Montrer que $\mathrm{Im}\ g$ et $\mathrm{Ker}\ g$ sont deux sous-espaces stables par f.
   (b) Réciproquement, on suppose que $\mathrm{Im}\ g$ et $\mathrm{Ker}\ g$ sont deux sous-espaces stables par f. On suppose de plus que g est un projecteur. Montrer que f et g commutent.

Exercice 3

A connaître et à savoir utiliser

Soient E, F et G trois K-espaces vectoriels, u une application linéaire de E dans F, v une application linéaire de F dans G. Montrer que

$$v \circ u = 0_{\mathcal{L}(E,G)} \quad \text{si et seulement si} \quad \mathrm{Im}\ u \subset \mathrm{Ker}\ v$$

Exercice 4

Soit E et F deux espaces vectoriels, et f une application linéaire de E dans F.

1. Soit V un sous-espace vectoriel de E. Montrer que
   (a) $f^{-1}\big(f(V)\big) = V + \mathrm{Ker}\ f$.
   (b) $f^{-1}\big(f(V)\big) = V \quad$ si et seulement si $\quad \mathrm{Ker}\ f \subset V$
2. Soit W un sous-espace vectoriel de F. Montrer que
   (a) $f\big(f^{-1}(W)\big) = W \cap \mathrm{Im}\ f$.
   (b) $f\big(f^{-1}(W)\big) = W \quad$ si et seulement si $\quad W \subset \mathrm{Im}\ f$
3. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, et V un sous-espace vectoriel de E. Montrer que

$$f^{-1}\big(f(V)\big) = f\big(f^{-1}(V)\big) \quad \text{si et seulement si} \quad \mathrm{Ker}\ f \subset V \subset \mathrm{Im}\ f$$

Exercice 5

Montrer que chacune des applications suivantes est un projecteur ou une symétrie, et en déterminer une base et une direction propre.

1. $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (4x - 6y, 2x - 3y)$

2. $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \mapsto \left(x, \dfrac{y+z}{2}, \dfrac{y+z}{2}\right)$
3. $\tau : \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ f \mapsto \big(\tau_f : x \mapsto f(-x)\big)$
4. $\delta_0 : \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ f \mapsto \big(f(0)\mathbb{1} : x \mapsto f(0)\big)$

Exercice 6

Soient E et F deux K-espaces vectoriels, et $g \in \mathcal{L}(F, E)$. On définit

$$\phi : E \times F \to E \times F,\ (x, y) \mapsto (x + g(y), y)$$

Montrer que ϕ est un automorphisme de $E \times F$.

Exercice 7

Soient E, F et G trois K-espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g, h \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer :

$$\mathrm{Ker}\,(g \circ f) = \mathrm{Ker}\,(h \circ f) \qquad \text{si et seulement si} \qquad \mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Ker}\,(g) = \mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Ker}\,(h)$$

Exercice 8

Soit E un K-espace vectoriel, et p, q des projecteurs de E. Montrer que $p + q$ est un projecteur si, et seulement si,

$$p \circ q + q \circ p = 0$$

Si c'est le cas, montrer que

$$\mathrm{Ker}\,(p + q) = \mathrm{Ker}\ p \cap \mathrm{Ker}\ q \qquad \mathrm{Im}\,(p + q) = \mathrm{Im}\ p \oplus \mathrm{Im}\ q$$

en vous aidant des étapes suivantes :

1. Montrer que $\mathrm{Im}\,(p + q) \subset \mathrm{Im}\ p + \mathrm{Im}\ q$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}\ p \cap \mathrm{Im}\ q = 0_E$.
3. Montrer que $\mathrm{Im}\ p + \mathrm{Im}\ q \subset \mathrm{Im}\,(p + q)$.
4. Conclure : $\mathrm{Im}\,(p + q) = \mathrm{Im}\ p \oplus \mathrm{Im}\ q$.
5. Montrer que $\mathrm{Ker}\ p \cap \mathrm{Ker}\ q \subset \mathrm{Ker}\,(p + q)$.
6. Montrer que $\mathrm{Ker}\ p \cap \mathrm{Ker}\ q \supset \mathrm{Ker}\,(p + q)$.

Exercice 9

Soit a, $b \in \mathbb{R}$. On définit $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ P & \longmapsto & \varphi(P) = (P(a), P(b)) \end{array} \right.$.

1. Montrer que φ est une application linéaire, autrement dit prouver que $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X], \mathbb{R}^2)$.
2. On suppose que $a = -1$ et $b = 3$. Déterminer le noyau et l'image de φ.

Exercice 10

Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & \varphi(f) = f' - 2f \end{array} \right.$.

1. Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.
2. Déterminer Kerφ. Conclusion ?
3. Justifier que φ est surjective.

Exercice 11

Soit E un K-espace vectoriel, α et β deux scalaires distincts, et u un endomorphisme de E tel que

$$(u - \alpha Id_E) \circ (u - \beta Id_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

On note $v = u - \alpha Id_E$ et $w = u - \beta Id_E$.

1. Simplifier $v \circ w$, $w \circ v$, $v - w$.
2. Montrer que $E = \text{Im } v + \text{Im } w$.
3. En déduire que $E = \text{Ker } v \oplus \text{Ker } w$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe deux scalaires γ_n et δ_n tels que

$$u^n = \gamma_n u + \delta_n Id_E$$

On rappelle que

$$u^n = \underbrace{u \circ u \circ \cdots \circ u}_{n \text{ fois}}$$

Exercice 12

On suppose que tout sous-espace vectoriel possède un supplémentaire

Soient E, F et G trois K-espaces vectoriels, et u et v deux endomorphismes de E

1. Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(E, G)$. Montrer que $\text{Ker } u \subset \text{Ker } v$ si, et seulement si, il existe $w \in \mathcal{L}(F, G)$ tel que $v = w \circ u$.
2. Soient $u \in \mathcal{L}(E, G)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer que $\text{Im } u \subset \text{Im } v$ si, et seulement si, il existe $w \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que $u = v \circ w$.

19.5 Exercices Complémentaires

Exercice 1

Les applications suivantes, entre $\mathbb{R}$-ev, sont-elles linéaires ? :

1. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = 2x + y - 1$.
2. $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x, y) = xy$.
3. $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x, y, z) = x - y + 2z$.
4. $k : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $k(x, y, z) = x - 2y$.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x + y, 2x - y)$.
Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$, et déterminer son automorphisme réciproque.

Exercice 3

1. Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, définie par $\varphi(x, y) = (y, 0)$.
   (a) Montrer que φ est linéaire.
   (b) Déterminer $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$. Que peut-on dire de $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$?
2. Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par $\varphi(x, y) = 2x - 3y$.
   (a) Montrer que φ est une forme linéaire.
   (b) Déterminer $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$.
3. Soit $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, définie par $\varphi(x, y, z) = (x, x, x)$.
   (a) Montrer que φ est linéaire.
   (b) Déterminer $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$. Calculer φ^2. Conclusion ?

Exercice 4

Les applications suivantes $E \to F$ sont-elles linéaires ? Justifiez votre réponse. Lorsque c'est le cas, déterminer leur noyau et leur image.

1. $u : f \mapsto f^2$, $E = F = \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.
2. $\delta_x : f \mapsto f(x)$, $E = \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$, $F = \mathbb{R}$.
3. $h : f \mapsto f$, $E = F = \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.
4. $g : f \mapsto Id_I$, $E = F = \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.

Exercice 5

Soient E un K-espace vectoriel, et u un endomorphisme de E.

1. On suppose qu'il existe un unique endomorphisme v de E tel que $u \circ v = Id_E$. Montrer que $v \circ u = Id_E$.
2. Donner un contre-exemple en cas de non-unicité de v.

Exercice 6

Soient E et F deux K-espaces vectoriels, et G_1 et G_2 deux sous-espaces supplémentaires de E. On note

$$\mathcal{K} = \{u \in \mathcal{L}(E, F) \mid u|_{G_2} = 0\}$$

Montrer que $\mathcal{K}$ est un espace vectoriel isomorphe à $\mathcal{L}(G_1, F)$.

Exercice 7

Soit E un K-espace vectoriel, et p, q des projecteurs de E. Montrer que

1. $\begin{cases} p \circ q = p \\ q \circ p = q \end{cases}$ si et seulement si $\operatorname{Ker} p = \operatorname{Ker} q$.

2. $\begin{cases} p \circ q = q \\ q \circ p = p \end{cases}$ si et seulement si $\operatorname{Im} p = \operatorname{Im} q$.

