Chapitre 16

Fractions rationnelles

16.1 Les fractions rationnelles

16.1.1 Le corps des fractions rationnelles

L'anneau $\mathbb{K}[X]$ étant intègre, on démontre qu'il est possible de définir son **corps des fractions** , noté $\boxed{\mathbb{K}(X)}$ qui vérifie :

- $\mathbb{K}[X]$ est un sous-anneau de $\mathbb{K}(X)$
- tout élément $F \in \mathbb{K}(X)$ s'écrit sous la forme

$$F = \frac{P}{Q}, \quad P, Q \in \mathbb{K}[X]\,,\ Q \neq \mathbf{0}$$

> Un tel couple (P, Q) est un **représentant** de la fraction rationnelle F.
>
> Ce représentant n'est pas unique. $\boxed{\dfrac{P}{Q} = \dfrac{P_1}{Q_1} \quad \Leftrightarrow \quad P\,Q_1 = P_1\,Q}$

- pour tout élément $P \in \mathbb{K}[X]$ nous avons $P = \dfrac{P}{1}$
- Les opérations de $\mathbb{K}(X)$ sont définies par

$$\frac{P}{Q} + \frac{P_1}{Q_1} = \frac{P\,Q_1 + P_1\,Q}{Q\,Q_1} \qquad \frac{P}{Q}\,\frac{P_1}{Q_1} = \frac{P\,P_1}{Q\,Q_1}$$

(Le résultat obtenu est indépendant des représentants choisis)

- Si $F = \dfrac{P}{Q} \neq \mathbf{0}$, alors $F^{-1} = \dfrac{Q}{P}$

Test 437 A-t-on $\dfrac{2\,X^3 - 7\,X^2 + 9}{X^2 + 4\,X + 3} = \dfrac{2\,X^2 - 9\,X + 9}{X + 3}$?

Test 438 Quelles sont les fractions rationnelles $\dfrac{A}{B}$ qui sont égales à un polynôme ?
Application : trouver $a, b \in \mathbb{R}$ pour que $F = \dfrac{X^2 + a\,X + b}{X + b} \in \mathbb{R}[X]$.

Test 439 Si $F = \dfrac{A}{B} = \dfrac{C}{D}$ et $B + D \neq 0$, montrer qu'alors $F = \dfrac{A + C}{B + D}$.
Comment peut-on, sans calculs, montrer que $F = \dfrac{A - C}{B - D}$,
puis que $\forall\ P, Q \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\},\ \ F = \dfrac{P\,A + Q\,C}{P\,B + Q\,D}$?

La **dérivée** [1] de $F = \dfrac{P}{Q}$ est la fraction $F' = \dfrac{P'Q - P\,Q'}{Q^2}$

Voir l'exercice "**Dérivée d'une fraction**" page 247.

1. Pour information (cette notion n'est pas explicitement au programme.)

16.1.2 Degré d'une fraction rationnelle

Le **degré** de la fraction rationnelle $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$

est la quantité $\deg(F) = \deg(P) - \deg(Q)$.

Notes :

- Cette définition est légitime puisque $\deg(F)$ est indépendant du représentant (P,Q).
- Un polynôme a le même degré en tant que polynôme et en tant que fraction rationnelle

Test 440 Que pensez-vous de l'affirmation "une fraction de degré 0 est un polynôme constant non nul"

Test 441 Soit $F \neq \mathbf{0} \in \mathbb{K}(X)$. Quel est le degré de $\dfrac{1}{F}$?

Opérations et degré : $\forall\ F_1, F_2 \in \mathbb{K}(X)$

- $\deg(F_1 + F_2) \leqslant \max\Big(\deg(F_1), \deg(F_2)\Big)$ (égalité si $\deg(F_1) \neq \deg(F_2)$)
- $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $\deg(\lambda\, F_1) = \deg(F_1)$
- $\deg(F_1\, F_2) = \deg(F_1) + \deg(F_2)$

Test 442 Soit $a \in \mathbb{R}$ et $F \in \mathbb{R}(X)$ avec $F = \dfrac{a\,X^4 - 4\,X^2 + X + 2}{X^2 - X - 2}$. Quel est le degré de $X^2 + X + 1 + F$?

Test 443 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$ et $F \in \mathbb{K}(X)$ de degré $d \in \mathbb{Z}$.
Peut-on déterminer le degré de la substitution $P(F)$?
Que peut-on en déduire sur le degré de la substitution $G(F)$ (où G est une fraction) ?

Voir l'exercice "**Degré d'une composée**" page 247.

16.1.3 Représentants irréductibles

Un **représentant irréductible** de $F \in \mathbb{K}(X)$ est un couple (P, Q) , tel que les deux polynômes P et Q soient premiers entre eux et vérifient $F = \dfrac{P}{Q}$.

Si Q est normalisé, (P, Q) est alors un **représentant irréductible unitaire**.

Existence des représentants irréductibles :

- Toute fraction rationnelle $F \in \mathbb{K}(X)$ admet des représentants irréductibles.
- Si $F = \dfrac{P}{Q} = \dfrac{P_1}{Q_1}$ sont deux représentants irréductibles, alors

$$\exists\ \lambda \in \mathbb{K}^* , \quad P_1 = \lambda\, P \quad \text{et} \quad Q_1 = \lambda\, Q$$

- Toute fraction rationnelle admet un unique représentant irréductible unitaire.

Test 444 Donner un représentant irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ de

$$\frac{X^2 - 1}{X^2 + X} \qquad \frac{X^3 - 1}{X^3 + X} \qquad \frac{X^4 + X^2 + 1}{X^2 + X + 1}$$

Test 445 A-t-on $\dfrac{3\,X^3 - 27\,X^2 + 13\,X - 12}{5\,X^2 - 18\,X + 9} = \dfrac{8\,X^4 + 5\,X^3 + 25\,X^2 - 5\,X + 12}{5\,X^3 + 2\,X^2 + 12\,X - 9}$

16.1.4 Zéros, pôles et fonction rationnelle

Les définitions qui suivent sont légitimes car elles sont indépendantes du représentant irréductible.

Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ est une fraction rationnelle donnée sous forme irréductible :

- $a \in \mathbb{K}$ est un **zéro d'ordre k** de F ssi a est un zéro d'ordre k de P
- $a \in \mathbb{K}$ est un **pôle d'ordre k** de F ssi a est un zéro d'ordre k de Q
- La **fonction rationnelle associée à F** est la fonction $t \mapsto \dfrac{\tilde{P}(t)}{\tilde{Q}(t)}$

(Cette fonction est définie sur $\mathbb{K}$ privé de l'ensemble de ses pôles)

Test 446 Quels sont les zéros et les pôles réels de $\dfrac{2X^4 + 5X^3 + X^2 - 5X - 3}{X^4 - X^3 - X^2 + X}$ (on précisera leur ordre de multiplicité)

Test 447 Si a est un pôle commun aux deux fractions rationnelles F et G, est-il un pôle de $F+G$? Même question en remplaçant "pôle" par "zéro".

16.2 Étude locale d'une fraction rationnelle

16.2.1 Elements simples

Les **éléments simples** de $\mathbb{K}(X)$ sont

- les monômes de $\mathbb{K}[X]$
- Les fractions de $\mathbb{K}(X)$ de la forme $\dfrac{N}{D^k}$ $\begin{cases} k \in \mathbb{N}^* \\ D \text{ irréductible} \\ N \neq \mathbf{0} \\ \deg(N) < \deg(D) \end{cases}$

Ce qui suit est destiné à montrer que toute fraction se met (de manière unique à l'ordre près), sous forme d'une somme d'éléments simples.

Pour décomposer $F = \dfrac{P}{Q}$ (donnée sous forme irréductible) :

- Pour séparer les monômes des fractions de degré négatif, on commence par mettre F sous la forme $F = E + \dfrac{P_0}{Q}$ $\Big(E$ polynôme et $\deg(\dfrac{P_0}{Q}) < 0\Big)$ 16.2.2
- On utilise la décomposition primaire $Q = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} Q_i^{\alpha_i}$ $\big(Q_i$ irréductible$\big)$, 16.2.3
  pour transformer $\dfrac{P_0}{Q}$ en $\dfrac{P_0}{Q} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{P_i}{Q_i^{\alpha_i}}$ $\Big($où $\deg \dfrac{P_i}{Q_i^{\alpha_i}} < 0\Big)$
- Chaque terme $\dfrac{P_i}{Q_i^{\alpha_i}}$ est une somme d'éléments simples $\dfrac{P_i}{Q_i^{\alpha_i}} = \displaystyle\sum_{k=1}^{\alpha_i} \dfrac{A_k}{Q_i^k}$. 16.2.4

Note : *Les trois paragraphes 16.2.2, 16.2.3 et 16.2.4 suivants ne supposent pas que les polynômes Q_i sont irréductibles.*

16.2.2 Partie entière

Toute fraction rationnelle s'écrit de manière unique comme somme d'un polynôme et d'une fraction de degré strictement négatif [2]

$$\forall\ F \in \mathbb{K}(X)\,,\ \exists!\ (E, F_1) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}(X)\,,\quad \begin{cases} \boxed{F = E + F_1} \\ \deg(F_1) < 0 \end{cases}$$

E est la **partie entière** de F F_1 en est la **partie fractionnaire**.

Note : $\boxed{\text{si } E \neq \mathbf{0} \text{ alors } \deg(E) = \deg(F)}$

Test 448

Soit la division euclidienne de A par B : $A = B\,Q + R$. Peut-on en déduire les parties entières des fractions suivantes : $\dfrac{A}{B}$? $\dfrac{B}{A}$? $\dfrac{A}{Q}$? $\dfrac{R}{B}$?

Test 449

E_1 et E_2 sont les parties entières des fractions F_1 et F_2.
Peut-on en déduire les parties entières de $F_1 + F_2$? $F_1 - F_2$? $F_1\,F_2$?

Test 450

Calculer la partie entière de $\dfrac{2\,X^4 + 9\,X^3 + 16\,X^2 + 12\,X + 7}{(X+2)\,(X^2+X+1)}$.
Pouvait-on en prévoir le degré ?

16.2.3 Décomposition de $P/Q_1\,Q_2\,\cdots\,Q_n$

Un premier outil :

Si $Q_1\,, Q_2\,, \cdots, Q_n$ sont premiers entre eux deux à deux, alors

$$F = \frac{P}{Q_1\,Q_2\,\cdots\,Q_n} \quad \text{se décompose en} \quad F = \frac{P_1}{Q_1} + \cdots + \frac{P_n}{Q_n}$$

Conséquence : si $Q_1\,, Q_2\,, \cdots, Q_n$ sont premiers entre eux deux à deux

toute fraction rationnelle $F = \dfrac{P}{Q_1\,Q_2\,\cdots\,Q_n}$ se décompose de manière unique en

$$\boxed{\frac{P}{Q_1\,Q_2\,\cdots\,Q_n} = E + \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i}{Q_i}} \qquad E \in \mathbb{K}[X] \text{ et } \forall\ i \in [\![1, n]\!]\,,\ \deg(P_i) < \deg(Q_i)$$

Remarque : E est la partie entière de la fraction

Test 451

La décomposition $F = \dfrac{1}{X^2+1} + \dfrac{X}{X^2-1}$ est-elle du type ci-dessus ?
En déduire une décomposition de $G = \dfrac{X^4 + X^3 + X^2 - X}{(X^2+1)\,(X^2-1)}$.
Peut-on obtenir une autre décomposition de F de ce type ?

Test 452

Décomposer $F = \dfrac{2}{(X-1)\,(X+1)}$. En déduire une décomposition de

$$G = \frac{2\,X}{(X-1)\,(X+1)} \quad \text{et} \quad H = \frac{4}{(X^2-1)^2}$$

2. C'est l'équivalent pour les polynômes de l'écriture classique : $3\frac{1}{4}$ $\left(3 + \dfrac{1}{4} = \dfrac{13}{4}\right)$.

16.2.4 Décomposition de P/Q^d (de degré négatif)

Si Q est un polynôme non constant, toute fraction rationnelle $F = \dfrac{P}{Q^d}$ $(d \in \mathbb{N}^*)$ se décompose,

de manière unique en $\boxed{\dfrac{P}{Q^d} = E + \dfrac{A_1}{Q^1} + \cdots + \dfrac{A_d}{Q^d} = E + \sum_{i=1}^{d} \dfrac{A_i}{Q^i}}$

où $\forall\ i \in [\![1, d]\!]$, $\deg(A_i) < \deg(Q)$

Test 453 Trouver la décomposition de $\dfrac{X^4 + 4X + 6}{(X+1)^3}$.

(On utilisera plusieurs divisions euclidiennes)

16.2.5 Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$

Aucune connaissance spécifique sur la décomposition en éléments simples sur un corps autre que $\mathbb{C}$ n'est exigible des étudiants. Les démonstrations ne sont pas exigibles.

Th. ▷ **Décomposition dans $\mathbb{C}(X)$**

si $\dfrac{P}{Q}$ est un représentant irréductible normalisé de $F \in \mathbb{C}(X)$

et si la décomposition primaire de Q est $Q = \prod_{i=1}^{n} (X - a_i)^{d_i}$,

(les $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont des complexes distincts deux à deux)

alors F s'écrit, de manière unique [a] $\boxed{F = E + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{d_i} \dfrac{\alpha_{i,k}}{(X - a_i)^k}}$

$E \in \mathbb{K}[X]$, $\forall\ i \in [\![1, n]\!]$, $\forall\ k \in [\![1, d_i]\!]$, $\alpha_{i,k} \in \mathbb{C}$

a. Unique à l'ordre prés.

$\sum_{k=1}^{d_i} \dfrac{\alpha_{i,k}}{(X - a_i)^k}$ est la **partie polaire** de F relative au pôle a_i.

16.2.6 Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$

Th. ▷ **Décomposition dans $\mathbb{R}(X)$**

si $\dfrac{P}{Q}$ est un représentant irréductible normalisé de $F \in \mathbb{R}(X)$

et si la décomposition primaire de Q est $Q = \prod_{i=1}^{n} (X - a_i)^{d_i} \prod_{j=1}^{m} (X^2 + b_j X + c_j)^{e_j}$,

(où les $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont les racines réelles distinctes deux à deux de Q, d'ordre de multiplicité respectifs $d_1, \cdots, d_n$ et $X^2 + b_1 X + c_1, \cdots, X^2 + b_m X + c_m$ sont des polynômes deux à deux distincts sans racine réelle, $e_1, \cdots, e_m$ sont des entiers naturels non nuls)

alors F s'écrit, de manière unique [a] $\boxed{F = E + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{d_i} \dfrac{\alpha_{i,k}}{(X - a_i)^k} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{e_j} \dfrac{\beta_{j,k} X + \gamma_{j,k}}{(X^2 + b_j X + c_j)^k}}$

$E \in \mathbb{R}[X]$, $\forall\ i \in [\![1, n]\!]$, $\forall\ k \in [\![1, d_i]\!]$, $\alpha_{i,k} \in \mathbb{R}$ $\forall\ j \in [\![1, m]\!]$, $\forall\ k \in [\![1, e_j]\!]$, $\beta_{j,k}, \gamma_{j,k} \in \mathbb{R}$

a. Unique à l'ordre prés.

Test 454

Quelle est la forme de la décomposition dans $\mathbb{C}(X)$ de

$$F = \frac{X^{10} + 7X^3 - 1}{2(X^3 - 1)^2} \qquad G = \frac{(X^2+2)^5}{X(X+1)^2(X^2+1)^3}$$

$$H = \frac{1}{(X^3-1)^3} \qquad I = \frac{1}{(X^5-1)^3}$$

(on ne demande pas d'effectuer les décompositions)

Test 455

Donner la forme de la décomposition dans $\mathbb{R}(X)$ des fractions F, G, H du test précédent.
(toujours sans le calcul effectif)

Test 456

P_1 et P_2 sont deux polynômes normalisés irréductibles distincts.
L'écriture $\dfrac{P_1}{P_2^2} + \dfrac{P_2}{P_1^2}$ est-elle une décomposition en éléments simples ?

16.3 Méthodes pratiques

16.3.1 Cas d'un pôle simple

Si a est un pôle simple de $F = \dfrac{P}{Q} = \dfrac{P}{(X-a)\,Q_1}$

la partie polaire relativement au pôle a est $\dfrac{\alpha}{X-a}$

Pour obtenir la valeur de α :

- $\alpha = \dfrac{P(a)}{Q_1(a)}$ s'obtient en multipliant F par $X-a$ puis en substituant a à X
- Comme $Q_1(a) = Q'(a)$, on a également $\alpha = \dfrac{P(a)}{Q'(a)}$.

Test 457

Décomposer $\dfrac{1}{X(X+1)(X+2)}$ et $\dfrac{1}{X^n - 1}$ dans $\mathbb{C}(X)$.

Test 458

Très classique (et important)

Soit $P = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X - a_i)$ où les a_i sont deux à deux distincts.

- Décomposer $\dfrac{P'}{P}$ en utilisant les techniques précédentes.

Th. ▷ **Cas particulier important :**

Si le polynôme scindé $P = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X-a_i)^{d_i}$

admet n zéros distincts a_i d'ordres d_i alors $\boxed{\dfrac{P'}{P} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{d_i}{X - a_i}}$

16.3.2 Quelques astuces classiques

- Quand il ne reste qu'un ou deux coefficients inconnus,
  on peut substituer à X une ou deux valeurs (réelles ou complexes)

Test 459

Dans $\mathbb{R}(X)$, décomposer $\dfrac{X}{(X^2-1)(X^2+X+1)}$ et $\dfrac{1}{X^2(1+2X+3X^2)}$

- Ne pas hésiter à substituer une valeur complexe à X, même pour décomposer dans $\mathbb{R}(X)$ (une telle substitution est équivalente à deux substitutions réelles).
  (sans oublier que les coefficients cherchés sont réels)

Test 460 Dans $\mathbb{R}(X)$, décomposer $\dfrac{1}{(X-1)\,(X^{\,2}+1)}$

- Utiliser une limite en l'infini : après multiplication par une puissance convenable de X, la limite en l'infini donne une relation entre les coefficients.

Test 461 Confirmer (en partie) les résultats des deux tests précédents en utilisant cette technique.

- pour obtenir la décomposition dans $\mathbb{R}(X)$, il est parfois plus simple de commencer par déterminer la décomposition dans $\mathbb{C}(X)$.

(puis de regrouper les parties conjuguées)

Test 462 Dans $\mathbb{R}(X)$, décomposer $\dfrac{16}{X^{\,4}+4}$.
En déduire la décomposition de $\dfrac{16\,X}{X^{\,4}+4}$.

16.3.3 Utilisation des symétries

- Si F est paire

l'unicité de la décomposition permet d'identifie $F(X)$ et $F(-X)$.

- Si F est impaire

l'unicité de la décomposition permet d'identifie $F(X)$ et $-F(-X)$.

Test 463 Soit la décomposition

$$F=\frac{a}{X+1}+\frac{b}{X-1}+\frac{c\,X+d}{X^{\,2}+X+1}+\frac{e\,X+f}{X^{\,2}-X+1}+\frac{g}{X^{\,3}}+\frac{h}{X^{\,2}}+\frac{i}{X}$$

Que peut-on en déduire si F est paire ? si F est impaire ?

16.4 Calcul de primitives

Rappel

Les primitives suivantes sont données sous réserve de définition...
Il ne faut pas apprendre ces résultats par cœur.

Fraction du type inverse d'un polynôme de degré 1 :

- $\displaystyle\int \frac{1}{x-a}\,dx=\ln\left|x-a\right|+C^{te}$

Rappel

Fraction du type inverse d'un polynôme de degré 2 :

- $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \text{Arctan}\,x + C^{te}$ (primitive connue)
- $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\ \text{Arctan}\,\frac{x}{a} + C^{te}$ $(a \neq 0)$ (on factorise par a et on change de variable)
- $\displaystyle\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx$ pour $\Delta < 0$: Arctan

  (Cas précédent après décomposition canonique)
- $\displaystyle\int \frac{x+\beta}{ax^2+bx+c}\,dx$ pour $\Delta < 0$: faire apparaître au numérateur la dérivée du dénominateur puis isoler en 2 fractions, l'une donnant un logarithme et l'autre un *Arctan*
- $\displaystyle\int \frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)}\,dx = \int \frac{a}{(x-x_1)} + \frac{b}{(x-x_2)}\,dx$ puis 2 logarithmes

  (a et b se détermine par identification)
- $\displaystyle\int \frac{1}{(x-x_1)^2}\,dx = \frac{-1}{(x-x_1)} + C^{te}$

Test 464

Mettre $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$ sous la forme d'une somme de deux fractions.

En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+2)}$.

Inspirez-vous de ce qui précède pour calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

Test 465

Intégrer : $\displaystyle\int_0^1 \frac{6-x}{(x-3)(2x-5)}\,dx \qquad \int_0^1 \frac{x-1}{(x+1)^2(x^2+1)}\,dx$

Test 466

Calculer

$$A = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} \quad B = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2-x+1)^2} \quad C = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2+x-1)^2}$$

Comment pouvait-on déduire B à partir de A ?

16.5 Exercices

Exercice 1
Dérivée d'une fraction

- Montrer que la définition de la dérivée d'une fraction est légitime
  (c'est à dire que le résultat est indépendant du représentant choisi.)
- Un polynôme a-t-il la même dérivée s'il est considéré comme une fraction ?
- A-t-on encore $\deg(F') = \deg(F) - 1$

Exercice 2
Degré d'une composée de fractions rationnelles

$P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme non nul, de degré n et de valuation m
$F, G \in \mathbb{K}(X)$ sont deux fractions (F de degré non nul).

- Quel est le degré de la substitution $P(F)$?
- Montrer que le résultat précédent peut être faux si $\deg(F) = 0$.
- Quel est le degré de la substitution $G(F)$?

Exercice 3
Décomposer en éléments simples $\dfrac{1}{X^3\,(1-X)^3}$.
En déduire des polynômes U et V, de degré 2, tels que $U\,X^3 + V\,(1-X)^3 = 1$

Exercice 4
Un exercice qu'il ne faut pas négliger...
$P \in \mathbb{C}[X]$ est normalisé de degré n, ayant n racines distinctes $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$.

1. Décomposer $\dfrac{1}{P}$ et $\dfrac{P'}{P}$ en éléments simples.
2. Montrer que $\dfrac{P'(1/x)}{x\,P(1/x)} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1-\alpha_i\,x}$ et

   $$\forall\, p \in \mathbb{N},\ \forall\, i \in [\![1, n]\!],\ \exists\, G_i \in \mathbb{C} \quad \frac{1}{1-\alpha_i\,x} = 1 + \alpha_i\,x + \alpha_i^2\,x^2 + \cdots + \alpha_i^p\,x^p + x^{p+1}\,\frac{G_i}{1-\alpha_i\,x}$$

   En déduire une méthode de calcul de $S_p = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^p$ $\quad (p \in \mathbb{N}^*)$.
3. On prend $P = x^3 - x + 1$. Calculer $S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$.

Exercice 5
Montrer qu'il existe $F \in \mathbb{R}(X)$ telle que $\mathrm{th}(3x) = F(\mathrm{th}\,x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et décomposer F en éléments simples.
Même question avec $\mathrm{th}(5x) = F(\mathrm{th}\,x)$

Exercice 6
Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$ la fraction $F = \dfrac{X}{(X-1)^2(X^2+1)^2}$].

Exercice 7
Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}(X)$ les fractions suivantes :

1. $F = \dfrac{10X^3}{(X^2+1)(X^2-4)}$
2. $F = \dfrac{X^2}{(X^2+X+1)^2}$
3. $F = \dfrac{n!}{X(X+1)\cdots(X+n)}$

Exercice 8

Simplifier les sommes $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Exercice 9

Calculer les dérivées n-ièmes des fonctions définies par :

1. $f(x) = \operatorname{Arctan} x$.
2. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x\cos a + 1}$.

Exercice 10

Résoudre l'équation différentielle

$$x(x-4)y' + (x-2)y = 0$$

Quelles sont les solutions sur $\mathbb{R}$?

16.6 Exercices Complémentaires

Exercice 1

On note n un entier naturel impair, $n \geq 3$ et $F = \dfrac{1}{(1+X^n)^3}$.

1. Déterminer les pôles sur $\mathbb{C}$ de F.
2. Préciser la forme de la décomposition en éléments simples de F.
3. Déterminer la partie polaire de -1, (on pourra faire un DL en -1 de $(x+1)^3F(x)$).

Exercice 2

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$

1. Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P'|P$.
2. Soit $P = \Pi_{k=1}^n (X-\lambda_k)^{\alpha_k} \in \mathbb{C}[X]$, les λ_k étant distincts. Décomposer $\dfrac{P''}{P}$ en éléments simples.
3. Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P''|P$.

Exercice 3

On note P un polynôme de degré n scindé à racines simples :

$$P = \prod_{k=1}^{n}(X-\lambda_k)$$

1. Décomposer $\dfrac{1}{P}$ en éléments simples.
2. On suppose $P(0) \neq 0$, exprimer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda_k P'(\lambda_k)}$.

Exercice 4

Décomposer $\dfrac{1}{X^3-1}$ et $\dfrac{X^3}{X^3-1}$ sur $\mathbb{C}$.

Exercice 5

Factoriser sur $\mathbb{C}$, X^4+1 puis décomposer en éléments simples $\dfrac{1}{X^4+1}$.

Exercice 6

Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$.

1. $\dfrac{X-1}{X^2(X^2+1)}$
2. $\dfrac{X+2}{(X^2-1)^2}$
3. $\dfrac{X^5+5X^4-X^3-5X^2-2}{1-X^2}$.
4. $\dfrac{X^5+5X^4-X^3-5X^2-2}{X^2+X+1}$

Exercice 7

Soit $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ et ω_i les racines n-ième de l'unité

1. Décomposer en élément simple $\dfrac{P(X)}{X^n-1}$.

2. En déduire que $\sum_{k=1}^{n} P(\omega_k) = nP(0)$
3. Calculer la somme $\sum_{k=1}^{n} \prod_{l \neq k} (\omega_k - \omega_l)$.

Exercice 8

Simplifier les sommes

1. $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$
2. $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{3k+8}{k(k+2)2^k}$

Exercice 9

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que si les racines de P sont réelles et simples, alors $P'^2 - PP''$ n'a pas de racines réelles.