

# Chapitre 12

## Polynômes

### 12.1 Algèbre des polynômes

#### 12.1.1 Définitions

Un polynôme à une indéterminée à coefficients dans le corps commutatif  $\mathbb{K}$  est une suite  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  à support fini, c'est-à-dire :  $S_A = \{i \in \mathbb{N} \mid a_i \neq 0\}$  est fini.  
Les  $a_i$  sont les coefficients du polynôme  $A$ .

Test 307

$(k)_{k \in \mathbb{N}}$  est-il un polynôme ?  
Même question pour  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  où  $a_0 = 100$  et  $\forall k \in \mathbb{N}^*, a_k = \prod_{i=0}^k (100 - i)$   
Pour cela on vérifiera si la suite est à support fini ou non (autrement dit les termes sont-ils nuls à partir d'un certain rang).

**Notes** | •  $A = (a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  et  $B = (b_k)_{k \in \mathbb{N}}$  sont égaux ssi  $\forall k \in \mathbb{N}, a_k = b_k$   
•  $A = (a_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est un polynôme ssi  $S_A$  est majoré  
c'est-à-dire  
 $\exists n \in \mathbb{N}, i > n \Rightarrow a_i = 0$ .

**Notation :**  $A = (a_i)_{i \in \mathbb{N}}$  se note <sup>1</sup>

$$A = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i = \sum_{i=0}^n a_i X^i \quad \text{si } S_A \subset \llbracket 0, n \rrbracket$$

$\mathbb{K}[X]$  désigne l'ensemble des polynômes à une indéterminée, à coefficients dans  $\mathbb{K}$ .

Le polynôme  $A$  est nul ssi  $\forall i \in \mathbb{N}, a_i = 0$  ( $A = \mathbf{0}$ ).  
est constant quand  $\forall i \in \mathbb{N}^*, a_i = 0$  ( $A = a_0 X^0$ )  
Un tel polynôme est déterminé par la donnée de  $a_0$ .  
est un monôme si le support est, soit vide, soit un singleton.

Test 308

Écrire le monôme  $X^k$  sous la forme  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ .  
(Utiliser le symbole de Kronecker :  $\delta_{i,k} = 1$  si  $i = k$  et 0 sinon)

Test 309

Le polynôme nul est-il constant ? est-ce un monôme ?

1. L'origine de cette notation découle de propriétés de l'algèbre des polynômes (voir ?? page ?? dans ce paragraphe).

## 12.1.2 Degré d'un polynôme

Si  $A$  n'est pas nul, son support  $S_A$  est un sous-ensemble fini non vide de  $\mathbb{N}$ , d'où les définitions suivantes :

- Le degré<sup>2</sup> du polynôme  $A \in \mathbb{K}[X]$  est
- $\deg(A) = \max(S_A)$  si  $A \neq \mathbf{0}$
  - $\deg(\mathbf{0}) = -\infty$  (par convention).
- La valuation<sup>3</sup> du polynôme  $A \in \mathbb{K}[X]$  est
- $\text{val}(A) = \min(S_A)$  si  $A \neq \mathbf{0}$
  - $\text{val}(\mathbf{0}) = +\infty$  (par convention).

$K_n[X]$  désigne l'ensemble des polynômes de  $\mathbb{K}[X]$  de degré au plus  $n$ .

(donc  $\mathbf{0} \in K_n[X]$ )



Ainsi :

$$\deg(A) = n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \begin{cases} a_n \neq 0 \\ \forall i \in \mathbb{N}, i > n \Rightarrow a_i = 0 \end{cases}$$

**Test 310** De la même façon, caractériser la valuation de  $A$ .

- Si  $A \neq \mathbf{0}$  est de degré  $n$  :
- le coefficient dominant de  $A$  est  $a_n$ .
  - le monôme dominant de  $A$  est  $a_n X^n$ .
  - $A$  est normalisé (ou unitaire) si  $a_n = 1$ .

**Test 311** Est-il vrai qu'un polynôme constant non nul a un degré nul ? une valuation nulle ?

**Test 312** Comment sont les polynômes  $A$  qui vérifient  $\text{val}(A) = \deg(A)$  ?

**Th.** ► Une caractérisation du polynôme nul

Avec les conventions habituelles ( $n \in \mathbb{N} \Rightarrow -\infty < n < +\infty$ ) :

$$\forall A \neq \mathbf{0}, \quad \text{val}(A) \leq \deg(A)$$

Par conséquent :

$$A = \mathbf{0} \Leftrightarrow \deg(A) < \text{val}(A)$$

## 12.1.3 Espace vectoriel des polynômes

$A = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$  et  $B = \sum_{i=0}^{\infty} b_i X^i$  sont deux polynômes de  $\mathbb{K}[X]$ , et  $\lambda \in \mathbb{K}$

► Somme :  $\sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) X^i$  est un polynôme noté  $A + B$

► Produit externe :  $\sum_{i=0}^{\infty} (\lambda a_i) X^i$  est un polynôme noté  $\lambda A$

Propriétés :  $\forall A, B \in \mathbb{K}[X], \forall \lambda \in \mathbb{K}$  :

- $\deg(A + B) \leq \max(\deg(A), \deg(B))$
- $\deg(A) \neq \deg(B) \Rightarrow \deg(A + B) = \max(\deg(A), \deg(B))$
- $\lambda \neq 0 \Rightarrow \deg(\lambda A) = \deg(A)$

**Note** : avec les conventions usuelles dans  $\overline{\mathbb{R}}$ , ces résultats restent valables si  $A = \mathbf{0}$  ou  $B = \mathbf{0}$ .

2. On peut le noter  $\deg(A)$  ou  $d^\circ(A)$ .

3. Pour information seulement (cette définition n'est pas au programme).

Muni de ces opérations :

$K[X]$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$   
 Il est de dimension infinie  
 de base canonique  $(X^0, X^1, \dots, X^n, \dots)$

**Test 313** Énoncer les résultats équivalents pour la valuation.

**Conséquence :**  $\mathbb{K}_n[X]$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}[X]$ .  
 Il est de dimension  $(n+1)$ ,  
 de base canonique  $(X^0, X^1, \dots, X^n)$

### 12.1.4 Algèbre des polynômes

$A = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$  et  $B = \sum_{i=0}^{\infty} b_i X^i$  sont deux polynômes de  $\mathbb{K}[X]$

► **Produit :**  $(c_i)_{i \in \mathbb{N}}$  définie par  $\forall i \in \mathbb{N}, c_i = \sum_{k=0}^i (a_k b_{i-k})$

est un polynôme noté

$A \cdot B$  ou  $AB$  ou  $A \times B$

**Propriétés :**  $\forall A, B \in \mathbb{K}[X]$

- $\deg(AB) = \deg(A) + \deg(B)$

Valable si  $A = 0$  ou  $B = 0$  (avec les conventions usuelles dans  $\mathbb{R}$ )

- $AB = 0 \Rightarrow A = 0$  ou  $B = 0$
- Si  $AB \neq 0$ , le coefficient dominant du produit est égal au produit des coefficients dominants.

Muni de ces opérations :

$K[X]$  est un anneau commutatif, intègre.  
 Ce n'est pas un corps :  
 $A$  est inversible ssi  $\deg(A) = 0$   
 (c'est-à-dire  $A$  constant non nul)

### 12.1.5 Substitution (composition) de polynômes

$A, B \in \mathbb{K}[X], A = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$ .

La composée  $A \circ B$ , encore notée  $A(B)$  est le polynôme  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i B^i$ .

On dit également qu'on substitue<sup>4</sup>  $B$  à  $X$  dans  $A$ .

**Notes :**

- Contrairement aux apparences, la somme est une somme finie  
 (A est à support fini)  
 donc,  $A \circ B$  est bien un polynôme. (élément de l'algèbre  $\mathbb{K}[X]$ )
- La substitution de  $X$  à  $X$  ne modifie pas  $A$ .  
 Ceci permet de noter indifféremment  $A$  ou  $A(X)$

**Test 314**

Les polynômes  $A$  et  $B$  sont non nuls, de degrés respectifs  $n$  et  $m$ .  
 -1- Quel est le degré de  $B^k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) ?  
 -2- Quel est le degré de  $A \circ B$  ?  
 -3- Que se passe-t-il si un des polynômes est nul ?

4. Ce vocabulaire et la notation  $A(B)$  seront justifiés plus loin dans ce chapitre [voir ?? page ??].

## 12.1.6 Division euclidienne

Th. ▷ Division euclidienne de  $A$  par  $B$ 

Pour tout couple  $(A, B)$  de polynômes,  $B$  non nul,  
il existe un unique couple  $(Q, R)$  de polynômes

tels que  $A = BQ + R$  et  $\deg(R) < \deg(B)$

$Q$  est le quotient de la division euclidienne

$R$  est le reste de la division euclidienne

**Remarque :** la démonstration précédente donne l'algorithme de la division euclidienne.

**Test 315** Le fait que  $\mathbb{K}$  est un corps est-il utile pour ce résultat ?

**Test 316**

Effectuer la division euclidienne de  $X^5 - X^4 - 3X^3 + X^2 + 3X + 1$   
par  $X^3 - X$ , puis par  $X^2 - X - 2$ .  
Le deuxième calcul était-il indispensable ?

**Test 317**

Effectuer la division euclidienne de  $A = X^5 + X^4 - X^3 - 1$  par  $X^3 - 1$ .  
En déduire la division euclidienne de  $A$  par  $X^2 + X - 1$ .

**Cas particulier :**

- le reste de la division euclidienne de  $A$  par  $B \neq 0$  est nul
- On dit que  $A$  est un multiple de  $B$  (ou  $B$  divise  $A$ )  $\text{ssi } \exists Q \in \mathbb{K}[X], A = BQ$
- On note  $A \in B \cdot K[X]$  ou encore  $B|A$ .
- On peut distinguer le cas particulier  $Q \in \mathbb{K}$  ( $Q$  de degré négatif ou nul)  
en disant que  $A$  est proportionnel<sup>5</sup> à  $B$ .

## 12.2 Polynôme dérivé

*Nous allons trouver ici des propriétés identiques à celles des fonctions dérivables.  
L'intérêt de ce paragraphe est que la notion de "dérivée d'un polynôme" est purement formelle.*

*Ne faisant pas appel à la notion de limite, les résultats peuvent être appliqués à des objets variés (fonctions, matrices, etc.)*

## 12.2.1 Dérivée formelle

Le polynôme dérivé de  $A = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \in \mathbb{K}[X]$  est  $A' = \sum_{i=1}^{\infty} i a_i X^{i-1}$ .

(Il est immédiat que  $A'$  est un polynôme puisque  $S_{A'} \subset \llbracket 0, \deg(A) \rrbracket$  est fini.)

**Test 318**

A quelle condition un polynôme de degré 2 est-il divisible par sa dérivée ?  
On pourra utiliser la division euclidienne de  $A$  par  $A'$  avec  $A = aX^2 + bX + c$ .

**Propriétés :**

- degré : (Ces deux propriétés ne sont pas assurées si  $\mathbb{K}$  est un autre corps que  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .)
  - si  $A$  n'est pas constant, alors  $\deg(A') = \deg(A) - 1$

5. Ce qui est légèrement différent du cas des polynômes associés [voir 15.1.1 page 225]

- $A$  est constant ssi  $A' = \mathbf{0}$
- *linéarité* :  $\forall A, B \in \mathbb{K}[X], \forall \lambda \in \mathbb{K}, (A + \lambda B)' = A' + \lambda B'$
- *produit* :
  - $\forall A, B \in \mathbb{K}[X], (AB)' = A'B + AB'$
  - $\forall A \in \mathbb{K}[X], \forall n \in \mathbb{N}^*, (A^n)' = n A^{n-1} A'$
- *substitution* :  $\forall A, B \in \mathbb{K}[X], (A \circ B)' = (A' \circ B) B'$

### 12.2.2 Dérivées successives

Pour  $k \in \mathbb{N}$  : la dérivée d'ordre  $k$  de  $A \in \mathbb{K}[X]$  est  $A^{(k)} = \begin{cases} A & \text{si } k = 0 \\ (A^{(k-1)})' & \text{si } k \geq 1 \end{cases}$

#### Propriétés :

- $\forall k, l \in \mathbb{N}, A^{(k+l)} = (A^{(k)})^{(l)}$  (en particulier  $A^{(k+1)} = (A')^{(k)}$ )
- *degré* si  $\deg(A) = n \in \mathbb{N}$ , alors  $\forall k \in \mathbb{N}, \begin{cases} k \leq n \Rightarrow \deg(A^{(k)}) = n - k \\ k > n \Rightarrow A^{(k)} = \mathbf{0} \end{cases}$
- *linéarité*  $\forall A, B \in \mathbb{K}[X], \forall \lambda \in \mathbb{K}, (A + \lambda B)^{(n)} = A^{(n)} + \lambda B^{(n)}$   
(L'opérateur "dérivée  $n^{\text{ème}}$  est linéaire.)
- *Formule de Leibniz*

$$\forall A, B \in \mathbb{K}[X], \forall n \in \mathbb{N}, (AB)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^{(k)} B^{(n-k)}$$

#### Test 319

**Une situation assez fréquente :**

Appliquer la formule de Leibniz pour obtenir la dérivée  $n^{\text{ème}}$  de  $(X^2 A)$  (où  $A$  est un polynôme et  $n \geq 2$ .)

### 12.2.3 Formule de Taylor

**Th.** > **Formule de Taylor pour les polynômes**

Pour  $\mathbb{K}$  sous-corps de  $\mathbb{C}$ , si  $P \in \mathbb{K}[X]$  et  $h \in \mathbb{K}$ , alors :

$$P(X+h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!} P^{(k)}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!} P^{(k)}(h)$$

Qui peut encore s'écrire

$$P(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(X-h)^k}{k!} P^{(k)}(h)$$

- La somme est finie (puisque  $k > \deg(P) \Rightarrow P^{(k)} = \mathbf{0}$ )

#### Test 320

Appliquer la formule à  $P = X^4$  avec  $h = 1$ . Vérifier.



## 12.3 Fonction polynôme et zéros

### 12.3.1 Fonction polynôme

La fonction polynomiale associée à  $A = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  est la fonction

$$\tilde{A} : \begin{cases} \mathbb{K} & \rightarrow \mathbb{K} \\ t & \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \end{cases}$$

- Note :**
- On dit qu'on a substitué  $t$  à  $X$ .
  - Si  $\mathbb{K}_1$  est un sur-corps de  $\mathbb{K}$ , on peut considérer que  $A \in \mathbb{K}_1[X]$ . La fonction  $\tilde{A}$  est naturellement définie sur  $\mathbb{K}_1$  (à valeurs dans  $\mathbb{K}_1$ ). Exemple :  $A = X^2 + 3X \in \mathbb{R}[X]$ , on peut utiliser  $\tilde{A}(2 - 4i)$
  - Sauf mention contraire, la fonction polynôme  $\tilde{A}$  associée à  $A \in \mathbb{K}[X]$  est définie sur  $\mathbb{K}$ .

#### Schéma (ou algorithme) de Horner<sup>6</sup>

Soit  $A = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ . Le calcul de  $\tilde{A}(t)$  est beaucoup plus rapide sous la forme

$$\tilde{A}(t) = a_0 + t(a_1 + t(a_2 + \cdots + t(a_{n-1} + t a_n)))$$

Une présentation sous forme de tableau permet d'effectuer plus facilement les calculs à la main. Prenons  $P(x) = 4x^3 - 8x^2 - 7x - 1 = -1 + x(-7 + x(-8 + x(4)))$ .

|     |   |                     |                          |                                 |
|-----|---|---------------------|--------------------------|---------------------------------|
|     | 4 | -8                  | -7                       | -1                              |
| $x$ |   | $4x$                | $(4x - 8)x$              | $((4x - 8)x - 7)x$              |
|     | 4 | $\nearrow (4x - 8)$ | $\nearrow (4x - 8)x - 7$ | $\nearrow ((4x - 8)x - 7)x - 1$ |

Ce qui permet de calculer une image à la main avec un minimum de calculs mais aussi de factoriser un polynôme.

Soit  $Q : x \mapsto x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ .  $Q$  admet pour racine évidente 2. Le tableau suivant permet de trouver la factorisation :

|   |   |    |    |    |
|---|---|----|----|----|
|   | 1 | -4 | 5  | -2 |
| 2 | 0 | 2  | -4 | 2  |
|   | 1 | -2 | 1  | 0  |

On obtient  $Q(x) = (x - 2)(x^2 - 2x + 1)$ .

**Note** L'exponentiation rapide est dans le même esprit :

$$t^{(2^k)} \text{ s'écrit } \left( \left( \cdots (t^2)^2 \cdots \right)^2 \right)^2 \quad (k \text{ niveaux})$$

Si  $n$  s'écrit  $\overline{b_p b_{p-1} \cdots b_1 b_0}$  en base 2, alors  $t^n = \prod_{k=0}^p b_k t^{(2^k)}$  s'évalue en un maximum de  $2p$  multiplications (au lieu d'environ  $2^p$  multiplications)  
Exemple :  $38 = \overline{100110}^2$   $t^{38} = t^2 (t^2)^2 \left( \left( ((t^2)^2)^2 \right)^2 \right)^2$  se calcule en 10 multiplications (au lieu de 37).



**Une astuce :**

Le reste de la division euclidienne de  $A$  par  $X - \alpha$  est  $\tilde{A}(\alpha)$

#### Test 321

$R$  est le reste de la division euclidienne de  $A \in \mathbb{R}[X]$  par  $(X - 1)^2$ .

- Qu'obtient-on en dérivant cette division euclidienne ?
- Comment peut-on calculer les constantes ?
- En déduire la valeur de  $R$ .

Application avec  $A = 1 + X + X^2 + \cdots + X^n$ .

6. William George HORNER (1661-1704) mathématicien Anglais

**Test 322**

S'inspirer du test précédent pour obtenir le reste de la division euclidienne de  $A \in \mathbb{K}[X]$  par  $(X-1)^3$ .

### 12.3.2 Zéros d'un polynôme

$x \in \mathbb{K}$  est un **zéro** (ou une **racine**) du polynôme  $A \in \mathbb{K}[X]$  ssi  $\tilde{A}(x) = 0$

**Note :** Si on définit  $\tilde{A}$  sur une  $\mathbb{K}$ -algèbre  $E$ , et si  $\tilde{A}(x) = 0_E$ ,  
on dit que  $x$  est un zéro de  $A$  dans  $E$   
Exemple :  $i$  est un zéro dans  $\mathbb{C}$  de  $X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$ .

**Th.**  $\triangleright$  **Zéros distincts et divisibilité**

- $\alpha \in \mathbb{K}$  est un zéro de  $A \in \mathbb{K}[X]$  ssi  $(X-\alpha) \mid A$
- $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$  sont des éléments distincts de  $\mathbb{K}$ .  
 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$  sont des zéros de  $A$   
ssi  $(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\cdots(X-\alpha_p) \mid A$

(Attention : il est indispensable que les zéros soient dans  $\mathbb{K}$ .)



*Conséquence 1*

Un polynôme non nul de degré  $n$   
admet au plus  $n$  zéros distincts.



*Conséquence 2*

$$\left. \begin{array}{l} P \in \mathbb{K}_n[X] \\ P \text{ admet plus de } n \text{ zéros distincts} \end{array} \right\} \Rightarrow P = 0$$

**Test 323**

Quels sont les zéros dans  $\mathbb{Q}$ , puis dans  $\mathbb{R}$ , puis dans  $\mathbb{C}$  de  $P_1 = X^2 - 1$ ,  
 $P_2 = X^2 - 2$ ,  $P_3 = X^2 + 2$ ,  $P_4 = X^2 + X + 1$ ,  $P_5 = X^4 + X^2 + 1$

**Test 324**

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  et  $\alpha_4$  sont les zéros de  $P = X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$ .  
Trouver les zéros de  $Q = X^4 - 2X^3 + 3X^2 + 1$  et de  $R = X^4 + 3X^2 + 2X + 1$ .  
On pourra remarquer que  $P(X) = Q(-X)$  et que  $R(X) = X^4 P\left(\frac{1}{X}\right)$ .

**Test 325**

Soit  $P = \frac{3}{2}(X-1)(X-2) - 2(X-1)(X-3) + \frac{1}{2}(X-2)(X-3) - X$ .  

- Sans développer  $P$ , peut-on majorer son degré?
- Toujours sans développer  $P$ , calculer  $P(1), P(2)$  et  $P(3)$ .
- Que pouvez-vous en déduire?

**Test 326**

**Un raisonnement indispensable :**  
Soit  $P = 2X^3 - 9X^2 + 14X - 5 \in \mathbb{R}[X]$  Calculer  $\tilde{P}_{\mathbb{C}}(2-i)$ .  
Peut-on en déduire une factorisation de  $P$  dans  $\mathbb{R}[X]$ ?  
On n'oubliera pas que si  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  est racine de  $P$  à coefficients réels, alors son conjugué aussi.

**Test 327**

**Comment éviter de longs calculs ?**  

- Trouver un polynôme simple de degré 2 à coefficients entiers ayant  $1 + \sqrt{2}$  pour zéro.
- $P = X^8 + X^7 - 6X^6 - 6X^5 + 5X^4 - 8X^3 - 4X^2 + 6X + 1$ .  
Utiliser une division euclidienne pour obtenir  $\tilde{P}(1 + \sqrt{2})$ .

## 12.3.3 Zéros multiples

$a \in \mathbb{K}$  est un zéro d'ordre  $k \in \mathbb{N}^*$  de  $A$  ssi

$$\exists Q \in \mathbb{K}[X], \quad A = (X - a)^k Q \text{ avec } \tilde{Q}(a) \neq 0$$

Un zéro multiple est un zéro d'ordre  $k \geq 2$ .

$k$  est l'ordre de multiplicité du zéro.

Tout zéro d'un polynôme  $A$  non nul admet un ordre unique.

$$\text{C'est } \max \{k \in \mathbb{N}^* \mid (X - a)^k \mid A\}$$

sous ensemble non vide de  $\mathbb{N}$  majoré par  $\deg A$ .

**Test 328**

$a$  est un zéro d'ordre  $k$  de  $P$ . Est-ce un zéro de  $P^2$ ? de quel ordre?

**Test 329**

$a$  est un zéro d'ordre  $k$  de  $P$ .

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses?

$$(X - a)^{k-1} \mid P \quad (X - a)^k \mid P \quad (X - a)^{k+1} \mid P$$

**Test 330**

Que peut-on dire de  $a$  si  $P = (X - a)^k Q$ ? ( $k \in \mathbb{N}^*$ )

**Th.** ▷ Zéros multiples et factorisation

Si  $a_1, a_2, \dots, a_m$  sont des zéros distincts de  $P \in K[X]$

d'ordres respectifs  $p_1, p_2, \dots, p_m$ , alors  $\prod_{k=1}^m (X - a_k)^{p_k}$  divise  $P$

Conséquences :

- Dans ces conditions, si  $P \neq 0$ , alors  $\deg(P) \geq \sum_{k=1}^m p_k$

*c'est-à-dire*

Un polynôme non nul de degré  $n$  admet au plus  $n$  zéros comptés avec leur ordre de multiplicité.

- Si de plus  $\deg(P) = \sum_{k=1}^m p_k$ , alors  $P = \alpha \prod_{k=1}^m (X - a_k)^{p_k}$

où  $\alpha$  est le coefficient dominant de  $P$ .



Prenons comme convention qu'un zéro d'ordre 0 d'un polynôme n'en est pas racine.

**Th.** ▷ Zéros multiples et dérivation

$\mathbb{K}$  est un sous-corps de  $\mathbb{C}$ .

$a \in \mathbb{K}$  est un zéro d'ordre  $k \geq 1$  de  $A \neq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \text{ est un zéro de } A \\ a \text{ est un zéro d'ordre } k-1 \text{ de } A' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \text{ est un zéro de } A, A', A^{(2)}, \dots, A^{(k-1)} \\ a \text{ n'est pas un zéro de } A^{(k)} \end{cases}$$

*Attention : ce théorème peut être faux avec d'autres corps.*

**Test 331**

Que peut-on dire si  $A \neq 0$  vérifie  $\tilde{A}(a) = \tilde{A}'(a) = \dots = \tilde{A}^{(k)}(a) = 0$ ?

**Test 332**

Trouver un polynôme non constant  $P$  tel que  $\tilde{P}(1) \neq 0$   
et  $\tilde{P}'(1) = \tilde{P}''(1) = \tilde{P}^{(3)}(1) = 0$

**Test 333**

$a \in \mathbb{K}$ . Écrire tous les polynômes  $P \in \mathbb{K}[X]$ , de degré 3 où

**-1-**  $a$  est un zéro d'ordre 3 de  $P$       **-2-**  $a$  est un zéro d'ordre 2 de  $P$

**Test 334**

$P = X^3 - 5X^2 + 8X - 4$ . Vérifier que 2 est un zéro de  $P$ . quel est son ordre? En déduire une factorisation de  $P$ .

**Test 335**

$P = X^5 - X^4 - 2X^3 + 2X^2 + X - 1$ . 1 est un zéro de  $P$ . Quel est son ordre ? Quel est l'autre zéro de  $P$  ? quel est son ordre ?

**Test 336**

$a$  est un zéro d'ordre  $k \geq 1$  de  $P$ . Les affirmations suivantes sont-elles vraies ?  
 $P^{(k-1)}(a) = 0$      $P^{(k)}(a) = 0$      $P^{(k+1)}(a) = 0$

## 12.4 Polynômes scindés

### 12.4.1 Définition

$A \in \mathbb{K}[X]$  non constant est scindé<sup>7</sup> (ou dissocié) s'il peut s'écrire

$$A = \lambda \prod_{k=1}^n (X - a_k) \quad \lambda, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$$

**Test 337**

Les polynômes  $X^2 - 1$ ,  $X^2 - 2$ ,  $X^2 + 1$ ,  $X^2 + 2$  sont-ils scindés dans  $\mathbb{Q}[X]$  ? dans  $\mathbb{R}[X]$  ? dans  $\mathbb{C}[X]$  ?

### 12.4.2 Relations entre coefficients et racines

Développons

- $(X - \alpha_1)(X - \alpha_2) = X^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)X + \alpha_1\alpha_2$
- $(X - \alpha_1)(X - \alpha_2)(X - \alpha_3) = X^3 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)X^2 + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3)X - \alpha_1\alpha_2\alpha_3$
- plus généralement :

**Important:**

$$\prod_{k=1}^n (X - \alpha_k) = X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \sigma_2 X^{n-2} - \dots + (-1)^k \sigma_k X^{n-k} + \dots + (-1)^n \sigma_n$$

où les  $\sigma_k$  sont les expressions symétriques élémentaires<sup>8</sup> de  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$

$\sigma_k$  est la  
"somme des produits  $k$  par  $k$ "  
des  $\alpha_i$

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sum_{1 \leq i_1 \leq n} \alpha_{i_1} \\ \sigma_2 &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \\ &\dots\dots\dots \\ \sigma_k &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_k} \\ &\dots\dots\dots \\ \sigma_n &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq n} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_n} = \prod_{k=1}^n \alpha_k \end{aligned}$$

**Test 338**

Écrire toutes les expressions symétriques élémentaires de  $\alpha_1, \alpha_2$ ,  
puis de  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , puis de  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ .

7. Certains auteurs font la distinction entre  $X^2 - 1$  qui est scindable et  $(X - 1)(X + 1)$  qui est scindé.

8. On dit aussi fonction symétrique élémentaire, ou polynôme symétrique élémentaire

**Th.** ▷ **Relations entre coefficients et racines d'un polynôme scindé**

Si  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k = \lambda \prod_{k=1}^n (X - \alpha_k)$  est scindé, alors

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \sigma_k = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$$

**Test 339**

Quelles sont les expressions symétriques élémentaires de  $(-1, -1, 1, 2)$  ?  
Vérifier vos résultats en développant  $(X+1)^2(X-1)(X-2)$ .

**Test 340**

Vérifier que 1, 2 et 3 sont des zéros de  $P = X^4 - X^3 - 19X^2 + 49X - 30$ .  
Sans factoriser, trouver un autre zéro de  $P$ .

**Test 341**

- Écrire toutes les relations entre  $a, b, c$  et les zéros de  $P = aX^2 + bX + c$  ( $a \neq 0$ )
- Même question avec  $P = X^3 + pX + q$ ,  
puis avec  $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$  ( $a \neq 0$ )

**12.4.3 Notions sur les fonctions symétriques**

*Ce paragraphe n'est pas explicitement au programme.*

*Aucune notion théorique sur les fonctions symétriques n'est exigible.*

Une fonction  $f : (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  de  $n$  variable est

- **symétrique** ssi pour toute bijection  $\sigma : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$   
 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)})$
- **antisymétrique** ssi pour tout échange  $x_i \leftrightarrow x_j$  ( $i \neq j$ )  
 $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = -f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)$

**Test 342**

Quelles sont les expressions symétriques de  $a_1, a_2, a_3$  ?

$$\begin{array}{lll} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 & a_1^2 + a_1a_2 + a_1a_3 & a_1^2a_2 + a_2^2a_3 + a_3^2a_1 \\ \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} & \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_1} & a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \frac{1}{a_1a_2a_3} \end{array}$$

**Intérêt :**

- On démontre que, si  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  est une expression rationnelle symétrique, elle peut s'exprimer uniquement en fonction des expressions symétriques élémentaires.
- Ceci permet de calculer certaines expressions qui font intervenir les solutions d'une équation algébrique, **sans connaître ces solutions**.

**Test 343**

$x_1$  et  $x_2$  sont les solutions de l'équation  $x^2 + ax + b = 0$ .  
Calculer  $x_1^2 + x_2^2$ ,  $x_1^3 + x_2^3$ ,  $x_1^4 + x_2^4$ ,

**Test 344**

$x_1$  et  $x_2$  sont les solutions de l'équation  $x^2 + ax + b = 0$ .  
Former une équation du second degré dont les solutions sont  $\frac{x_1}{x_2}$  et  $\frac{x_2}{x_1}$ .

(Voir l'exercice "à faire absolument".)



## 12.5 Exercices

### Exercice 1

Division euclidienne de  $P = X^4 + 6X^3 + 10X^2 + 3X - 6$  par  $X^2 + 3X$ .  
En déduire la décomposition de  $P$  en produit de polynômes de  $\mathbb{R}_2[X]$ .

### Exercice 2

Soit  $P = 1 + X(X+1)(X+2)(X+3)$ .

1. Calculer le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $P'$  (polynôme dérivé).
2. Montrer que  $P'$  est divisible par ce reste.
3. En déduire une factorisation de  $P$ .

### Exercice 3

**Incontournable...**

1.  $\alpha$  et  $\beta$  sont les restes de la division euclidienne de  $P$  par  $X - a$  et  $X - b$  ( $a \neq b$ ).  
Trouver le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $(X - a)(X - b)$ .
2. Généraliser avec  $(X - a)(X - b)(X - c)$ .

### Exercice 4

**Les grands classiques :** étudier, dans  $\mathbb{C}[X]$  la divisibilité de :

1.  $X^n \sin(\theta) - X \sin(n\theta) + \sin((n-1)\theta)$  par  $X^2 - 2X \cos \theta + 1$
2.  $X^{2n} - 2X^n \cos(n\theta) + 1$  par  $X^2 - 2X \cos \theta + 1$
3.  $X^n - a^n$  par  $X^p - a^p$

### Exercice 5

Résoudre l'équation  $x^5 - 13x^4 + 67x^3 - 171x^2 + 216x - 108 = 0$  sachant qu'elle a des racines réelles multiples

### Exercice 6

Déterminer les réels  $m, n$  et  $p$  pour que l'équation

$x^6 + mx^4 + 10x^3 + nx + p = 0$  ait une racine réelle quadruple.

Quelles sont les racines du polynôme.

### Exercice 7

**A faire absolument...**  $x_1, x_2$  et  $x_3$  sont les zéros de  $X^3 + pX + q$ .

1. Calculer  $x_1 + x_2 + x_3$  et  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$
2. Comment peut-on évaluer  $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$  sans calculs (ou presque!) ?
3. Même question pour  $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$ .

### Exercice 8

Décomposer le polynôme  $P = X^4 + 12X - 5$  en produit de deux polynômes de degré 2, sachant que deux de ses zéros (complexes) ont pour somme 2.

### Exercice 9

Soit l'équation à coefficients entiers  $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$  avec  $a_0 \neq 0$ .

Montrer que si le rationnel  $\frac{p}{q}$  (donné sous forme irréductible) est solution de l'équation, alors  $p$  divise  $a_n$  et  $q$  divise  $a_0$ .

*Applications* : trouver (si elles existent), les racines rationnelles de  $3x^3 + 8x^2 + 12x - 5 = 0$  puis de  $x^3 - x - 1 = 0$  et enfin de  $2x^6 + x^5 - 9x^4 - 6x^3 - 5x^2 - 7x + 6 = 0$ .

Exercice 10

Trouver trois complexes  $a, b, c$  qui vérifient 
$$\begin{cases} a + b + c = 2 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 2 \\ a^3 + b^3 + c^3 = 8 \end{cases}$$

## 12.6 Exercices Complémentaires

### Exercice 1

1. En développant de deux manières différentes le polynôme  $(1+X)^n(1+X)^m$ , montrer que pour  $0 \leq k \leq \min(m, n)$ , 
$$\binom{m+n}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i}.$$
2. Développer de deux manières différentes le polynôme  $(1+X)^n(1-X)^n$  : préciser le coefficient du terme de degré  $n$ , et simplifier

$$S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}^2$$

### Exercice 2

1. Donner deux expressions du polynôme dérivée de  $(1+X)^n$ .  
En déduire la valeur de  $A_n = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$ .
2. Développer le polynôme  $X(1+X)^n$ , et exprimer son polynôme dérivé de deux façons.  
Quelle égalité remarquable obtient-on pour  $X = 1$  ?  $X = -1$  ?

### Exercice 3

On désire calculer rapidement  $P(\varphi)$  avec  $P = X^5 + 2X^4 - X^3 - 2X - 6$  et  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

1. Effectuer la division euclidienne de  $P$  par  $F = X^2 - X - 1$ .
2. Calculer  $P(\varphi)$ .
3. S'inspirer de ce qui précède pour indiquer une méthode permettant de calculer rapidement  $S(\alpha)$  avec  $\alpha = 3 + \sqrt{2}i$  et  $S = 2X^6 - 11X^5 + 3X^4 + 15X^3 - 34X^2 + 47X - 23$ .

### Exercice 4

A l'aide de la formule de Taylor, déterminer le reste dans la division euclidienne de  $X^n$  par  $(X-1)^3$ .

On rappelle cette formule : si  $P$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à  $n$ , alors, pour tout  $a \in \mathbb{K}$ , 
$$P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k.$$

### Exercice 5

1. Montrer que 2 est racine du polynôme  $P = X^4 - 9X^3 + 30X^2 - 44X + 24$ .  
Quel est son ordre de multiplicité ?
2. Quelles sont les autres racines de  $P$  ?

### Exercice 6

Quels sont les polynômes  $P$  de  $\mathbb{C}[X]$  qui soient  $T$ -périodiques ( $T \in \mathbb{C}^*$ ), (ie) vérifiant :  $\forall z \in \mathbb{C}$ ,  $P(z+T) = P(z)$  ?

### Exercice 7

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  : montrer que le polynôme  $A = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$  est divisible par  $B = (X-1)^2$ . Déterminer le quotient dans la division euclidienne de  $A$  par  $B$ .

**Exercice 8**

Soit  $P$  un polynôme non nul de  $\mathbb{R}[X]$  tel que  $P(X^2) = P(X)P(X-1)$ .

1. Montrer que, si  $a$  est une racine éventuellement complexe de  $P$ , alors  $a^2$  et  $(a+1)^2$  sont aussi racines de  $P$ .
2. Montrer que 0 n'est pas racine de  $P$ .
3. Montrer que, si  $a$  est une racine de  $P$ , alors  $|a+1| = 1 = |a|$ .
4. En déduire les racines de  $P$  et sa forme.

**Exercice 9**

Factoriser dans  $\mathbb{C}[X]$  puis  $\mathbb{R}[X]$  les polynômes suivants :

- |                     |  |                                        |                                |
|---------------------|--|----------------------------------------|--------------------------------|
| 1. $P = X^4 - 1$    |  | 5. $P = X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ | 7. $P = (1 - X^2)^3 + 8X^3$    |
| 2. $P = X^5 - 1$    |  | 6. $P = X^4 - 2\cos(\varphi)X^2 + 1$   | 8. $P = (1 - X^2)^3 - 8X^3$    |
| 3. $P = X^4 + 1$    |  |                                        |                                |
| 4. $P = X^{2n} - 1$ |  |                                        | 9. $P = X^6 + 3X^4 + 3X^2 + 1$ |

**Exercice 10**

Soit  $P = X^5 + 1$  et  $Q = \frac{P}{X+1}$ . Montrer que, si  $z$  est une racine de  $Q$ , alors  $Z = z + \frac{1}{z}$  vérifie une équation du second degré. Puis factoriser  $P$  dans  $\mathbb{R}[X]$ .