Chapitre 8

Les nombres réels

8.1 Les ensembles de nombres

Rappelons les ensembles de nombres standards.

Définition (**Ensembles de nombres**)

$\mathbb{N}$ *: ensemble des nombres naturels c'est-à-dire* $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$

$\mathbb{Z}$ *: ensemble des nombres relatifs c'est-à-dire des entiers naturels ainsi que leurs opposés.*

$\mathbb{Q}$ *: ensemble des nombres rationnels. Il est l'ensemble des nombres pouvant s'écrire comme le quotient d'un entier relatif et d'un entier naturel non nul.*

$\mathbb{R}$ *: ensemble des nombres réels c'est-à-dire de tous les nombres que vous avez rencontré dans votre scolarité. Par exemple :* $2,\ -13,\ \dfrac{2002}{2003},\ \dfrac{\sqrt{2}}{3},\ \pi,\ e^6 ...$

$\mathbb{C}$ *: ensemble des nombres complexes (chapitre dédié)*

Test 179 Quelles sont les structures algébriques (groupes/anneaux/corps) de ces ensembles pour les opérations addition et produit usuelles ? Quelles sont les inclusions entre ces ensembles ?

Test 180 Démontrer que $\sqrt{2}$ est un irrationnel autrement dit montrer par l'absurde qu'il ne peut s'écrire comme le quotient irréductible de 2 entiers.

8.2 Notion d'ordre

8.2.1 Relation d'ordre

Une **relation d'ordre** sur un ensemble E est une relation binaire $\prec$ qui vérifie :

- ► $\prec$ est *réflexive* $\forall\, x \in E,\ x \prec x$
- ► $\prec$ est *antisymétrique* $\forall\, x, y \in E,\quad (x \prec y \text{ et } y \prec x) \Rightarrow x = y$
- ► $\prec$ est *transitive* $\forall\, x, y, z \in E,\quad (x \prec y \text{ et } y \prec z) \Rightarrow x \prec z$

On dit alors que $(E, \prec)$ est un ensemble ordonné.

$\prec$ est un **ordre total** si deux éléments quelconques de E sont comparables

$$\forall\, x, y \in E,\quad x \prec y \text{ ou } y \prec x$$

$\prec$ est un **ordre partiel** dans le cas contraire

Exemples :

- l'égalité définit un ordre sur un ensemble.
- L'ordre naturel dans $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$, noté $\leqslant$.

  Attention : "l'ordre strict ¡" n'est pas une relation d'ordre.
- Dans $\mathbb{N}$ la relation "divise", notée $|$ est une relation d'ordre.

  Attention : ce n'est pas une relation d'ordre dans $\mathbb{Z}$.

  0 est un multiple de tous les entiers mais n'est diviseur que de lui-même.
- L'inclusion $\subset$ dans $\mathcal{P}(E)$

Test 181 Montre que l'égalité est antisymétrique ?

Test 182 A-t-on : $a \not\prec b \Rightarrow b \underset{\neq}{\prec} a$?
On pourra exhiber un contre-exemple avec la relation d'ordre divise sur $\mathbb{N}$.

Test 183 Si $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ sont deux relations d'ordre.
La relation "$\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$" est-elle une relation d'ordre ?
Même question avec la relation "$\mathcal{R}_1$ ou $\mathcal{R}_2$".

8.2.2 Majorant, etc

Soit $(E, \prec)$ un ensemble ordonné et $A \subset E$.
$M \in E$ est un **majorant** de A dans E ssi $\forall\, a \in A,\ a \prec M$

$m \in E$ est un **minorant** de A dans E ssi $\forall\, a \in A,\ m \prec a$

On dit aussi que M majore A et que m minore A

M est le **plus grand élément** de A ssi M majore A et $M \in A$.

m est le **plus petit élément** de A ssi m minore A et $m \in A$.

Remarques
- L'existence d'un majorant (d'un minorant) n'est pas assurée
- Un ensemble peut admettre plusieurs majorants (plusieurs minorants)

Th. ▷ **Unicité du plus grand élément**

Si A est un sous-ensemble de l'ensemble ordonné E :
- s'il existe, le plus grand élément de A est unique
- s'il existe, le plus petit élément de A est unique

Test 184 Dans l'ensemble ordonné $(E, \prec)$, montrer que si M majore A, m minore A et $A \neq \varnothing$, alors $m \prec M$.

Test 185 Deux majorants de $A \subset E$ sont-ils nécessairement comparables ?
On exhibera un contre-exemple avec la relation d'ordre divise sur $\mathbb{N}$.

Test 186 Traduisez "x n'est pas un majorant de A .

8.2.3 Borne supérieure - inférieure

A est une partie de l'ensemble ordonné $(E, \prec)$.

La **borne supérieure** de A dans E est
le plus petit élément de l'ensemble des majorants de A

La **borne inférieure** de A dans E est
le plus grand élément de l'ensemble des minorants de A

Propriétés :
- Si elle existe, la borne supérieure (inférieure) est unique
- S'il existe, le plus grand élément (resp. plus petit élément) est la borne supérieure (resp. inférieure)

Pratique
Pour montrer que $S = \sup A$:
► montrer que S majore A
► puis montrer au choix :
▷ soit : tout autre majorant M de A vérifie $S \prec M$
▷ soit sa contraposée : $\forall\, x \in E,\ s \not\prec x \Rightarrow \exists\, a \in A,\ a \not\prec x$ (assez rare)

Si E est totalement ordonné :
cette dernière méthode est souvent la plus pratique puisqu'elle devient
▷ $\forall\, x \in E,\quad x \underset{\neq}{\prec} S \Rightarrow \exists\, a \in A \quad x \underset{\neq}{\prec} a$

Test 187
Dans $\left(\mathcal{P}(E), \subset\right)$, montrer que $\sup\left\{A, B\right\} = A \cup B$
On pourra montrer que $A \cup B$ majore $\left\{A, B\right\}$ et que tout majorant X de $\left\{A, B\right\}$ contient $A \cup B$.

Test 188
On se place dans $\mathbb{R}$ muni de l'ordre $\leq$ habituel.
Soit $A = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Trouver $\sup\limits_{\mathbb{R}} A$ et $\inf\limits_{\mathbb{R}} A$.

Test 189
(Plus difficile) A et B sont deux sous-ensembles de $\left(E, \prec\right)$.
Montrer que $\sup(A \cup B) = \sup\left\{\sup(A), \sup(B)\right\}$.
(on suppose l'existence des bornes supérieures)

8.3 L'ensemble $\mathbb{R}$ des réels

Les ensembles successifs de nombres présentent des lacunes :
- $(\mathbb{N}, +)$ *n'est pas un groupe d'où l'extension à* $\mathbb{Z}$
- $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ *n'est pas un corps d'où l'extension à* $\mathbb{Q}$
- $\left\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leqslant 2\right\}$ *n'a pas de borne sup*[1] *d'où la construction de* $\mathbb{R}$
- *puis l'existence de certaines équations algébriques sans solutions réelles conduit à construire* $\mathbb{C}$ *qui est algébriquement clos*[2].

Mais ceci sort du cadre de ce chapitre.

8.3.1 Le corps des réels

(Admis sans démonstration)

A un "isomorphisme près", il existe un unique ensemble noté $\mathbb{R}$, qui vérifie :
- ▶ $\mathbb{R}$ est un corps commutatif
- ▶ $\mathbb{R}$ est muni d'une relation d'ordre total (notée $\leqslant$), compatible avec l'addition et avec la multiplication par un réel positif

  La compatibilité signifie :
  $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}, \quad x \leqslant y \Rightarrow x + z \leqslant y + z$
  $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}, x \leqslant y$ et $0 \leqslant z \Rightarrow x\,z \leqslant y\,z$
- ▶ $\mathbb{R}$ vérifie l'axiome de la borne supérieure

Important:
Axiome de la borne supérieure :
Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

On démontre alors que $\mathbb{R}$ prolonge la structure de corps totalement ordonné de $\mathbb{Q}$ autrement dit $\mathbb{Q}$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$ et l'ordre dans $\mathbb{Q}$ coïncide avec l'ordre de $\mathbb{R}$.

Test 190
Justifier les équivalences suivantes :
$\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}, \quad x \leqslant y \Leftrightarrow x + z \leqslant y + z$
$\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ \forall\, z \in \mathbb{R}_+^*,\ x \leqslant y \Leftrightarrow x\,z \leqslant y\,z$

On en déduit les premières propriétés :
- $x \leqslant y \Leftrightarrow -y \leqslant -x$
- *règle des signes :* $\begin{cases} 0 \leqslant x \text{ et } 0 \leqslant y \Rightarrow 0 \leqslant x\,y \\ x \leqslant 0 \text{ et } y \leqslant 0 \Rightarrow 0 \leqslant x\,y \end{cases}$ $\begin{cases} 0 \leqslant x \text{ et } y \leqslant 0 \Rightarrow x\,y \leqslant 0 \\ x \leqslant 0 \text{ et } 0 \leqslant y \Rightarrow x\,y \leqslant 0 \end{cases}$
- *Somme d'inégalités :* $x \leqslant y$ et $x' \leqslant y' \Rightarrow x + x' \leqslant y + y'$
- *Produit d'inégalités :* $0 \leqslant x \leqslant y$ et $0 \leqslant x' \leqslant y' \Rightarrow x\,x' \leqslant y\,y'$
- $\boxed{\text{Toute partie non vide minorée de } \mathbb{R} \text{ admet une borne inférieure}}$

1. Historiquement, c'est l'absence de solutions rationnelles de l'équation $x^2 = 2$ qui pousse à trouver une extension de $\mathbb{Q}$.
2. C'est-à-dire que toute équation à coefficients complexes admet des solutions complexes.

Th. ▷ **Propriétés d'Archimède**

Le groupe $(\mathbb{R},+)$ est Archimèdien

$$\forall\, x,y \in \mathbb{R}, \quad x>0 \Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N} \quad y \leqslant n\,x$$

Le groupe $(\mathbb{R}^*,\times)$ est Archimèdien

$$\forall\, x,y \in \mathbb{R}^*, \quad x>1 \Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N} \quad y \leqslant x^n$$

8.3.2 Cas particulier de $\mathbb{N}$

Th. ▷ **Parties non vides de $\mathbb{N}$**

Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ majorée admet un plus grand élément.
Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

Le principe de récurrence se base sur ce théorème

Test 191 Démontrer que toute liste strictement décroissante de nombres de $\mathbb{N}$ est finie

8.3.3 Valeur absolue

La **valeur absolue** du réel x est définie au choix par :

- $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$
- le terme positif ou nul de l'ensemble $\{-x, x\}$
- $|x| = \max(-x, x)$

Propriétés :

- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad |x| = |-x|$
- $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \big|\,|x|\,\big| = |x|$
- $\forall\, x,y \in \mathbb{R}, \quad |x\,y| = |x|\,|y|$
- $\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*, \quad \left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$
- **Inégalité triangulaire** $\boxed{\forall\, x,y \in \mathbb{R}, \quad \Big|\,|x|-|y|\,\Big| \leqslant \big|x+y\big| \leqslant \big|x\big| + \big|y\big|}$

Test 192 **Très important :**
montrer l'équivalence $\quad \big|x-a\big| \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow a-\varepsilon \leqslant x \leqslant a+\varepsilon$

Test 193 **Très important :**
montrer l'équivalence $\quad \big(\forall\, \varepsilon > 0, \quad \big|x\big| \leqslant \varepsilon\big) \Leftrightarrow x = 0$

Test 194 Représentation graphique de $f : x \mapsto x + \big|\,|x+1| + 2\,x - 1\,\big|$

Test 195 **Une astuce pour calculer** $\max(x,y)$ **:**
– Montrer que $\quad \max(x,y) = \dfrac{1}{2}\left(\big|\,x-y\,\big| + x + y\right)$
– Trouver une formule analogue pour déterminer $\min(x,y)$

8.3.4 Distance sur $\mathbb{R}$

Une **distance** sur un ensemble E est une application $d : E\times E \to \mathbb{R}$ qui vérifie :

- ▶ $\forall\, x,y \in E, \quad d(x,y) \geqslant 0$
- ▶ $\forall\, x,y \in E, \quad d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$
- ▶ $\forall\, x,y \in E, \quad d(x,y) = d(y,x)$ *(symétrie)*
- ▶ $\forall\, x,y,z \in E, \quad d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$ *(inégalité triangulaire)*

Th. ▷ **Distance naturelle sur ℝ**

L'application $d : \begin{cases} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & |x-y| \end{cases}$ définit une distance sur ℝ.

8.3.5 La droite numérique achevée

La **droite numérique achevée** est l'ensemble $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$
où $+\infty$ est un élément vérifiant $\forall\ x\in\mathbb{R},\ x<+\infty$
et $-\infty$ est un élément vérifiant $\forall\ x\in\mathbb{R},\ -\infty<x$
(on prolonge la relation d'ordre)

On prolonge *partiellement* les opérations "+" et "×", de façon naturelle
$a+(+\infty)=+\infty$, $(+\infty)+(+\infty)=+\infty$, etc.
si $a>0$: $a\times(+\infty)=+\infty$, $(+\infty)\times(+\infty)=+\infty$, etc.
mais $(+\infty)+(-\infty)$, $0\times(+\infty)$, etc. ne sont pas définis
(ce qui correspond aux résultats sur la limite d'une somme ou d'un produit)

Test 196 $(\overline{\mathbb{R}},+,\times)$ est-il un anneau ? un corps ?

8.3.6 Les intervalles de ℝ

Un **intervalle** de ℝ est constitué de tous les réels compris entre a et b $(a,b\in\overline{\mathbb{R}})$

Ils sont classés en différentes catégories, prenons a et b des réels :
- suivant l'appartenance (ou non) des bornes à l'intervalle
  - Intervalles fermés $[a\,,\,b]$, $]-\infty,a]$, $[a,+\infty[$, $]-\infty,+\infty[$, $\varnothing$
  - Intervalles ouverts $]a\,,\,b[$, $]-\infty,a[$, $]a,+\infty[$, $]-\infty,+\infty[$, $\varnothing$
  - Intervalles semi-ouverts (semi-fermés) $[a\,,\,b[$, $]a\,,\,b]$
- suivant que les bornes sont réelles ou non
  - Intervalles bornés $[a\,,\,b]$, $[a\,,\,b[$, $]a\,,\,b]$, $]a\,,\,b[$, $\varnothing$
  - non bornés $]-\infty,a]$, $]-\infty,a[$, $[a\,,+\infty[$, $]a\,,+\infty[$, $]-\infty,+\infty[$

Un **segment** est un intervalle fermé borné.

Note : Généralement, la notation $[a\,,\,b],]a\,,\,b]$, etc suppose que $a\leqslant b$.
Cependant, dans certaines situations on ignore "l'ordre des bornes".
Il est alors acceptable d'utiliser ces notations avec $a>b$.
(ce préférence en signalant cette éventualité)

Test 197 Pourquoi l'ensemble vide est-il borné ?

Test 198 Ecrire l'ensemble vide comme un intervalle ? Précisez-en la nature.

Th. ▷ **Intervalles et convexité**

Les intervalles de ℝ sont les sous-ensembles convexes :

$$I \text{ intervalle} \quad\Leftrightarrow\quad \forall\ a,b,c\in\mathbb{R},\quad \left.\begin{matrix} a,c\in I \\ a\leqslant b\leqslant c\end{matrix}\right\} \Rightarrow b\in I$$

Test 199 Montrer que toute intersection (finie ou non) d'intervalles de ℝ est un intervalle de ℝ.
On pourra montrer que cette intersection est convexe.
Donner un contre-exemple pour la réunion ?

Test 200 Montrer que $I=\bigcap_{n\in N^*}]0,\dfrac{n+1}{n}[$ est un intervalle et qu'il n'est pas ouvert.

Test 201 Que pensez-vous de $I=\bigcap_{n\in N^*}]0,\dfrac{1}{n}]$?

8.4 Approximations dans $\mathbb{R}$

8.4.1 Congruence

Soit $a \in]0, +\infty[$.

La **congruence modulo a** [3] est la relation binaire sur $\mathbb{R}$ définie par

$$x \equiv y\ [a] \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, k \in \mathbb{Z}, \quad y - x = k\,a \qquad (\Leftrightarrow y - x \in a\,\mathbb{Z})$$

La congruence est une **relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$** , car elle est :

- *réflexive :* $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad x \equiv x\ [a]$
- *symétrique :* $\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \quad x \equiv y\ [a] \Rightarrow y \equiv x\ [a]$
- *transitive :* $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}, \quad x \equiv y\ [a]$ et $y \equiv z\ [a] \Rightarrow x \equiv z\ [a]$

Propriété : La congruence est compatible avec l'addition :

$$\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}, \quad x \equiv y\ [a] \quad \Rightarrow \quad x + z \equiv y + z\ [a]$$

Conséquence : $\forall\, x, x', y, y' \in \mathbb{R}, \quad \left.\begin{array}{r} x \equiv y\ [a] \\ x' \equiv y'\ [a] \end{array}\right\} \Rightarrow x + x' \equiv y + y'\ [a]$

Test 202

Se méfier de la multiplication :
Que pensez-vous des propositions suivantes où t est un réel non nul :

(1) $x \equiv y\ [a] \Rightarrow t\,x \equiv t\,y\ [a]$
(2) $x \equiv y\ [a] \Leftrightarrow t\,x \equiv t\,y\ [a]$
(3) $x \equiv y\ [a] \Rightarrow t\,x \equiv t\,y\ [t\,a]$
(4) $x \equiv y\ [a] \Leftrightarrow t\,x \equiv t\,y\ [t\,a]$

Éventuellement, dire quelles sont les précisions qui peuvent rendre les propositions vraies ?

8.4.2 Partie entière

Th. ▷ **Encadrement d'un réel**

$$\forall\, a, x \in \mathbb{R}, \ a > 0, \quad \exists!\, n \in \mathbb{Z}, \quad n\,a \leqslant x < (n+1)\,a$$

c'est-à-dire : *tout réel x est, de manière unique, compris entre deux multiples entiers consécutifs de a*

Utilisé avec $a = 1$, ce théorème montre que tout réel x est compris entre deux entiers consécutifs. Cet unique entier, noté $E(x)$ ou $\lfloor x \rfloor$, est la **partie entière** [4] de x.

On retient : $\boxed{E(x) \in \mathbb{Z}}$ et $\boxed{\begin{array}{c} E(x) \leqslant x < E(x) + 1 \\ x - 1 < E(x) \leqslant x \end{array}}$ (voir la note [5])

Attention : $E(x)$ n'est pas "ce qui se trouve avant la virgule".
(Cela n'est vrai que si le réel x est positifs)

Test 203

Quand c'est possible, calculer en fonction de $E(x)$ et $E(y)$ les quantités

$$E(x+1)\,, \quad E(\frac{x}{2}) \quad E(2\,x), \quad E(x+y), \quad E(-x)$$

Test 204

Donner la représentation graphique sur $[-3; 3]$ de

$$f(x) = E(2\,x)\,,\ g(x) = E(x^2)\,,\ h(x) = E(\sqrt{x})\,,\ k(x) = E\left(\frac{1}{2}\,E(\frac{x}{2})\right)$$

8.4.3 $\mathbb{R}$ et les rationnels

Th. ▷ **$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$**

tout intervalle ouvert non vide rencontre $\mathbb{Q}$:

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R}, \quad a < b \Rightarrow]\, a\,,\, b\,[\cap \mathbb{Q} \neq \varnothing$$

Ceci montre qu'on peut, avec une précision arbitraire ε, approcher un réel quelconque x par un rationnel r :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \exists\, r \in \mathbb{Q}, \quad \left|x - r\right| < \varepsilon$$

Conséquence : entre deux réels distincts il existe au moins un irrationnel.

Ceci signifie que $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. On dit que $\mathbb{Q}$ est **rare** dans $\mathbb{R}$.

8.4.4 Les décimaux

$x \in \mathbb{R}$ est un **nombre décimal** s'il se met sous la forme $x = \dfrac{p}{10^{\,n}}$, $(p, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$

Rappel : l'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux est un sous-anneau de $\mathbb{R}$.

Test 205 Pourquoi $\mathbb{D}$ n'est-il pas un corps ?

Th. ▷ **Approximation décimale d'un réel**

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \exists\, p \in \mathbb{Z} \quad \frac{p}{10^{\,n}} \leqslant x < \frac{p}{10^{\,n}} + \frac{1}{10^{\,n}}$$

$\dfrac{p}{10^{\,n}}$ est l'approximation décimale par défaut

$\dfrac{p+1}{10^{\,n}}$ est l'approximation décimale par excès

3. La notion de congruence n'est pas explicitement au programme.
Il en est de même pour la notion générale de "relation d'équivalence".
4. C'est le **floor** de Python.
5. La tendance actuelle est d'utiliser la notation $\lfloor x \rfloor$.
Certains ouvrages utilisent encore la notation $[x]$

8.5 Exercices

Révisions sur le calcul avec les inégalités

Exercice 1

Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 10$, on a $n^3 \leq 2^n$.

Exercice 2

a et b étant des réels (et b étant non nul), encadrer au mieux les nombres $|a|$, $|b|$, $a-b$, $a\,b$ et $\dfrac{a}{b}$ dans chacun des cas suivants.

1. $-2 \leq a \leq 7$ et $1 < b < 3$.
2. $0 < a < 2$ et $-1 < b \leq 4$.
3. $-1 \leq a < 4$ et $-2 < b \leq -1$.

Exercice 3

Dire si les propriétés suivantes sont vraies ou fausses (x, y, a, b, c, d désignant des nombres réels) :

1. $x \leq 3$ implique $x^2 \leq 9$.
2. $0 \leq x \leq 3$ implique $x^2 \leq 9$.
3. $0 \leq x \leq 3$ équivaut à $x^2 \leq 9$.
4. $x > 3$ implique $x^2 > 3$.
5. $x > 3$ équivaut à $x^2 > 9$ et $x > 0$.
6. $x^2 < 9$ implique $x \leq 3$.
7. $x^2 > 9$ implique $x > 3$.
8. $0 < a < 4$ et $9 < b$ implique $\dfrac{a}{9} < \dfrac{b}{4}$.
9. $0 < a < 9$ et $4 < b$ implique $\dfrac{a}{4} < \dfrac{b}{9}$.
10. $x < y$ et x et y non nuls implique $\dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{x}$.
11. $0 < a < b$ et $0 < c < d$ implique $\dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{d}$.
12. $0 < a < b$ et $0 < c < d$ implique $\dfrac{a}{d} < \dfrac{b}{c}$.
13. $0 < a < b$ et $0 < c < d$ implique $ac < bd$.
14. $0 < a < b$ et $0 < c < d$ implique $ad < bc$.

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les (in)équations suivantes :

1. $\sqrt{x+1} \leq x-1$.
2. $\sqrt{x^2-x-2} \geq x+3$.
3. $\sqrt{1-\cos t} = \sin t$.
4. $\sqrt{2-x} + \sqrt{3+x} \geq 1$.

Exercice 5

Soient a et b tels que $0 \leq b \leq a$. Simplifier

$$\sqrt{a + 2\sqrt{a-b}\sqrt{b}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a-b}\sqrt{b}}$$

Exercice 6

Montrer que, pour tout a, b réels positifs

$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Montrer que pour tous réels a et b,

$$\sqrt{|a-b|} \geq \left|\sqrt{|a|} - \sqrt{|b|}\right|$$

Bornes supérieures

Exercice 7

Déterminer les bornes des ensembles suivants :

$$A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

$$B = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \mid n \in \mathbb{N}^*, m \in \mathbb{N}^* \right\}$$

$$C = \left\{ \frac{1}{n} + (-1)^n \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

$$D = \left\{ 1 + \frac{1}{n-m} \mid n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}, n \neq m \right\}$$

$$E = \left\{ x + \frac{1}{x} \mid x \in \mathbb{R}_+^* \right\}$$

$$F = \mathbb{Q} \cap]0,1[$$

$$G =]0,1[\cup \{2\}$$

$$H = \{\exp(-n) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

$$J = \left\{ \frac{1}{2n} + \frac{1}{2m+1} \mid n \in \mathbb{N}^*, m \in \mathbb{N} \right\}$$

Exercice 8

Une application croissante de $[a;b]$ dans lui-même possède un point fixe

On se donne $f : [a;b] \longrightarrow [a;b]$ croissante. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble

$$\mathcal{E} = \{\ x \in [a;b] \mid f(x) \leq x\ \}$$

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est non vide et en déduire qu'il possède une borne inférieure notée t.
2. Montrer que $f(t)$ minore $\mathcal{E}$. En déduire que $t = \min \mathcal{E}$.
3. Montrer que $f(\mathcal{E}) \subset \mathcal{E}$. En déduire que $f(t) \geq t$. *Nous avons ainsi montré que toute fonction $f : [a;b] \longrightarrow [a;b]$ croissante possède un* point fixe*, c'est-à-dire qu'il existe $t \in [a;b]$ tel que $f(t) = t$.*
4. Le résultat est-il toujours vrai pour une fonction croissante $f : [a;b[\longrightarrow [a;b[$?

Partie entière

Exercice 9

Pour tout réel x, comparer $E(-x)$ et $E(x)$. Calculer $E(x) + E(-x)$.

Exercice 10

Soit x un réel, et n un entier naturel non nul. Montrer que

$$E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$$

Exercice 11

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad E\left(\frac{n}{3}\right) + E\left(\frac{n+2}{6}\right) + E\left(\frac{n+4}{6}\right) = E\left(\frac{n}{2}\right) + E\left(\frac{n+3}{6}\right)$$

8.6 Exercices Complémentaires

Exercice 1

Soient A et B des parties non vides de $\mathbb{R}$. On note

$$-A = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in A,\ x = -y\} = \{-x\ ;\ x \in A\}$$

$$A + B = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists (a, b) \in A \times B, x = a + b\}$$

$$AB = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists (a, b) \in A \times B, x = ab\}$$

1. Soient A et B bornées. Déterminer $\sup(A \cup B)$ et $\inf(A \cup B)$, aprés en avoir justifié l'existence.
2. A-t-on une propriété analogue concernant $\sup(A \cap B)$ et $\inf(A \cap B)$?
3. Exprimer $-A$, $A+B$ et AB comme images respectivement de A et de $A \times B$ d'applications à préciser.
4. Montrer que si A est majorée, $-A$ est minorée, et donner une expression de $\inf -A$ à l'aide de $\sup A$.
5. Enoncer et démontrer une propriété analogue si l'on suppose que A est minorée.
6. On suppose que A et B sont bornées. Montrer que $A + B$ est bornée. Montrer que

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B \qquad \text{et} \qquad \inf(A + B) = \inf A + \inf B$$

7. A-t-on $\sup(AB) = \sup(A)\sup(B)$?

Exercice 2

Montrer que, si $0 < x < y$, on a $\dfrac{x}{1+y} < \dfrac{y}{1+x}$ et $\dfrac{x}{1+x} < \dfrac{y}{1+y}$.

Exercice 3

On définit les fonctions f et g par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = E(2x) - 2E(x) \text{ et } g(x) = 3E(2x) - 2E(3x)$$

Montrer que les fonctions f et g sont bornées, périodiques et déterminer $f(\mathbb{R})$ et $g(\mathbb{R})$.

Exercice 4

1. Que peut-on dire de la somme et du produit de deux rationnels ? d'un rationnel et d'un irrationnel ? de deux irrationnels ?
2. Soient a et b, deux rationnels positifs tels que $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ soient irrationnels.
   Montrer que $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ est irrationnel.
   <u>Indication</u> : examiner le produit et la somme de $(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ *et* $(\sqrt{a} - \sqrt{b})$.

Exercice 5

Soient I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$: montrer que $I + J$ est encore intervalle.

Exercice 6

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une application croissante telle que : $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Montrer que :

1. $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(na) = nf(a)$.
2. $\forall a \in \mathbb{R}$,$\forall n \in \mathbb{Z}$, $f(na) = nf(a)$.
3. $\forall r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = rf(1)$.

4. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = xf(1)$ (utiliser la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$).

Exercice 7

$\mathcal{R}$ est l'ensemble des relations binaires sur l'ensemble non vide E.
On définit sur $\mathcal{R}$ la relation "être plus fine", noté $R \prec R'$

$$R \prec R' \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, x, y \in E,\ x\,R\,y \Rightarrow x\,R'y$$

1. Montrer que $\prec$ définit une relation d'ordre sur $\mathcal{R}$.
2. Soit $R \in \mathcal{R}$. On note $\overline{R}$ la relation binaire définie sur E par

$$\begin{array}{rcl} a\,\overline{R}\,b & \Leftrightarrow & \exists\, n \in \mathbb{N},\ \exists\, a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{2n} \in E \\ & \text{tels que} & a_0 = a,\ a_{2n} = b,\ \text{ et} \\ & & \forall\, i \in [\![0, n-1]\!] \begin{cases} a_{2i}\,R\,a_{2i+1} \text{ ou } a_{2i} = a_{2i+1} \\ a_{2i+2}\,R\,a_{2i+1} \text{ ou } a_{2i+2} = a_{2i+1} \end{cases} \end{array}$$

   (a) Montrer que $\overline{R}$ est une relation d'équivalence et que $R \prec \overline{R}$
   (b) Montrer que, si R' est une relation d'équivalence et $R \prec R'$, alors $\overline{R} \prec R'$
   (c) En déduire que R est d'équivalence ssi $R = \overline{R}$

Exercice 8

Soit $f : E \to \mathbb{R}$. $\max(f)$ désigne le plus grand élément de $f(E)$ (image de E par f). Si f et g sont deux applications de $E \to \mathbb{R}$, montrer, en supposant l'existence des maximums, que $\max(f+g) \leqslant \max f + \max g$ et que $\max(f-g) \geqslant \max f - \max g$.
Donner des exemples où ces inégalités sont strictes.

Exercice 9

Des hussards de tailles variées sont disposés en rectangle. On repère le plus grand de chaque rangée et on retient le plus petit des plus grands, noté X. Puis on repère le plus petit de chaque colonne et on retient le plus grand des plus petits, noté Y. Comparer les tailles de X et Y.

Exercice 10

Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}^+$.

$$E\big(\sqrt{x}\big) = E\left(\frac{x}{2}\right)$$