Chapitre 4

Nombres complexes

4.1 L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes

4.1.1 Définition

Définition (**Définition**)

On admet qu'il existe un ensemble, noté $\mathbb{C}$ et appelé **ensemble des nombres complexes** *, vérifiant les propriétés suivantes :*

— *$\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$*
— *$\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication possédant les mêmes propriétés algébriques (règles de calculs, distributivité...) que sur $\mathbb{R}$.*
— *Il existe un élément de $\mathbb{C}$ noté i tel que $i^2 = -1$.*
— *Tout nombre complexe s'écrit de façon unique sous la forme $z = a + ib$ où a et b sont des nombres réels.*

$\boxed{x = \mathrm{Re}\,(z)}$ est la **partie réelle**

$\boxed{y = \mathrm{Im}\,(z)}$ est la **partie imaginaire**

Un complexe de la forme $i\,y,\ y \in \mathbb{R}$ est un **imaginaire pur** . On note $i\mathbb{R}$ l'ensemble des imaginaires purs.
Ainsi tout complexe s'écrit de manière unique comme somme d'un réel et d'un imaginaire pur, ce qui s'appelle sa **forme algébrique** .

Proposition (Inversible)

Tout complexe non nul admet un inverse : $\dfrac{1}{x + i\,y} = \dfrac{x - i\,y}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$

□ **Inversible**

ce qui conduit à étudier les quantités $x - i\,y$ et $x^2 + y^2$.

Test 84

Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système suivant $\begin{cases} x + i\,y = a + i\,b \\ y + i\,x = b + i\,a \end{cases}$ (x, y sont les inconnues complexes, a, b des paramètres complexes.)

4.1.2 Conjugaison

Le **conjugué** du complexe $z = x + i\,y,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$ est $\boxed{\overline{z} = x - i\,y}$.

La conjugaison $\begin{cases} \mathbb{C} & \to \mathbb{C} \\ z \mapsto & \overline{z} \end{cases}$ a pour propriétés :

- $\forall\ (z, z') \in \mathbb{C}^2, \quad \overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ (addition)
- $\forall\ (z, z') \in \mathbb{C}^2, \quad \overline{z\,z'} = \overline{z}\ \overline{z'}$ (multiplication)
- $\forall\ z \in \mathbb{C}, \quad \overline{\overline{z}} = z$ (involution)

Ces propriétés ont des conséquences immédiates :

$$\overline{z - z'} = \overline{z} - \overline{z'} \qquad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$$

Test 85 Soient a et b des complexes. Quel est le conjugué de $a + i\,b$?

Important:

Deux outils indispensables :

- ► $\forall\, z \in \mathbb{C}, \quad \mathrm{Re}\,(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}\,, \quad \mathrm{Im}\,(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2\,i}$
- ► $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}\,, \quad z \in i\,\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\,\overline{z}$

Test 86 **Il est souvent préférable de ne pas utiliser la forme algébrique ...**

... ou de repousser son utilisation au maximum.

Soit $a = 2 + 3\,i,\ b = 1 - 2\,i$. Déterminez $z \in \mathbb{C}$ tel que $\dfrac{z - a}{z - b} \in \mathbb{R}$.

On remarquera qu'un nombre complexe m appartient à $\mathbb{R}$ si et seulement si $m = \overline{m}$.

Test 87 Vérifier que $2 - i$ est solution de l'équation $2\,z^2 - (1 - 3\,i)\,z - 7 + i = 0$. Factoriser. En déduire l'autre solution.

4.1.3 Module

Le <u>**module**</u> du complexe z est le réel $\boxed{|z| = \sqrt{z\,\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}}$

Un module est bien défini. C'est un réel positif ou nul.

Premières propriétés : pour tous complexes z, z' nous avons

- $|z| = |\overline{z}| = |-z|$
- $\mathrm{Re}\,(z) \leqslant |\mathrm{Re}\,(z)| \leqslant |z| \qquad \mathrm{Im}\,(z) \leqslant |\mathrm{Im}\,(z)| \leqslant |z|$
- $|z\,z'| = |z|\ |z'| \qquad \left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$

L'inégalité triangulaire : pour tous complexes z, z' nous avons

- $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$
- ***cas d'égalité*** $|z + z'| = |z| + |z'|$
  <u>ssi</u> z et z' sont proportionnels dans un rapport réel positif
- ***seconde forme de l'inégalité triangulaire*** $||z| - |z'|| \leqslant |z - z'|$

Test 88 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $|z| = z$.

□ **Norme**

Le module définit une norme sur $\mathbb{C}$:

- $\forall\, z \in \mathbb{C}, \quad |z| \geqslant 0$
- $\forall\, z \in \mathbb{C}, \quad |z| = 0 \Rightarrow z = 0$
- $\forall z, z' \in \mathbb{C}, \quad |z\,z'| = |z|\ |z'|$
- $\forall\, z, z' \in \mathbb{C}, \quad |z + z'| \leqslant |z| + |z'|$

4.1.4 Interprétation graphique

Le plan affine[1] euclidien $\mathcal{P}$ est rapporté au repère orthonormé direct $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

Il a pour direction le plan vectoriel[2] euclidien P.

Donc $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ est une base orthonormée directe de P.

A tout complexe $z = x + i\,y,\ x, y \in \mathbb{R}$ on associe $M \in \mathcal{P}$ (ou $\overrightarrow{u} \in P$) de coordonnées (x, y) .
$\mathcal{P}$ est souvent appelé " <u>**plan complexe**</u> "[3]

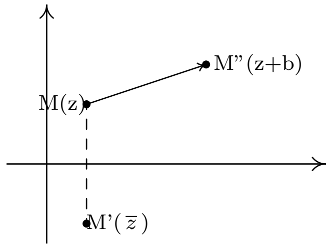
1. Les éléments du plan affine sont des points.
2. Les éléments du plan vectoriel sont des vecteurs.
3. Ou encore "plan d'<u>**Argand-Cauchy**</u> ".

On notera $M(z)$ ou $\overrightarrow{u}(z)$

z est l'**affixe** de M (et de $\overrightarrow{u}$)
M (ou $\overrightarrow{u}$) est l'**image** de z.

l'application $\mathcal{P} \to \mathcal{P}$ définie par :

- $M(z) \mapsto M'(\overline{z})$ est la symétrie orthogonale par rapport à l'axe $x'Ox$
- $M(z) \mapsto M''(z+b)$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{u}(b)$ ($b \in \mathbb{C}$ est constant)



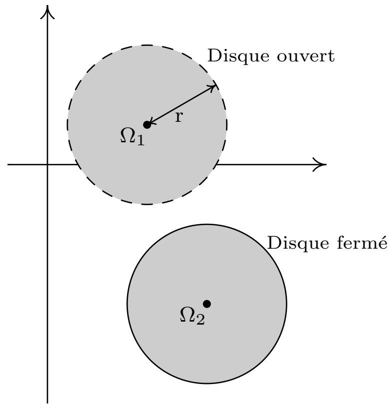
Test 89 Soit $A(a), B(b), C(c)$ trois points du plan complexe. Trouver les affixes a', b', c' des points qui forment les parallélogrammes $ABCA', BCAB'$ et $CABC'$.

- Le module est interprété comme une distance ou une norme :

$$|z| = d(OM) = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|$$

$$|z - z'| = d(M, M') = \left\|\overrightarrow{MM'}\right\|$$

- Le **cercle** de centre $\Omega(\omega)$ et de rayon $r > 0$ est l'ensemble $\mathcal{C}(\Omega, r) = \{M(z) \in \mathcal{P} \mid |z - \omega| = r\}$
- Le **disque ouvert** de centre $\Omega(\omega)$ et de rayon $r > 0$ est l'ensemble $\mathcal{B}(\Omega, r) = \{M(z) \in \mathcal{P} \mid |z - \omega| < r\}$
- Le **disque fermé** de centre $\Omega(\omega)$ et de rayon $r > 0$ est l'ensemble $\mathcal{B}_F(\Omega, r) = \{M(z) \in \mathcal{P} \mid |z - \omega| \leqslant r\}$



Test 90 Trouver la médiatrice du segment $A(1+i)B(2-i)$

4.2 Le groupe $\mathcal{U}$ des nombres complexes de module 1

4.2.1 Structure de $\mathcal{U}$

On désigne par $\mathcal{U}$ l'ensemble des complexes de module 1 : $\boxed{\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}}$
Son image est le "cercle trigonométrique".

L'ensemble $\mathcal{U}$ vérifie les propriétés suivantes :

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\bullet\ \mathcal{U} \text{ est stable pour la multiplication} \\ \bullet\ \times \text{ est associative dans } \mathcal{U} \\ \bullet\ 1 \in \mathcal{U} \text{ est élément neutre pour } \times \\ \bullet\ \forall\, z,\ z \in \mathcal{U} \Rightarrow \dfrac{1}{z} \in \mathcal{U}\end{array}\right\}\text{groupe} \\ \bullet\ \times \text{ est commutative}\end{array}\right\}\text{groupe abélien}$$

☐ groupe
☐ Groupe commutatif

4.2.2 Forme trigonométrique

- Tout complexe non nul z s'écrit de manière unique sous la forme

$$z = \lambda\, z_0, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+^*,\ z_0 \in \mathcal{U}$$

- Tout élément $z_0 \in \mathcal{U}$ peut se mettre sous la forme

$$z_0 = \cos\theta + i\,\sin\theta,\ \theta \in \mathbb{R}$$

La **forme trigonométrique** de $z \in \mathbb{C}^*$ est $\boxed{z = |z|\,(\cos\theta + i\,\sin\theta) = |z|\,e^{i\theta}}$
θ est **un argument** de z.

Attention : θ existe, mais n'est pas unique. Il est déterminé "modulo 2π"
Par contre, il existe un unique argument dans l'intervalle $\left]-\pi,\pi\right]$ appelé **argument principal** de z.
On ne peut pas définir un argument du complexe nul.
L'écriture $z=\rho\,\left(\cos\theta+i\,\sin\theta\right),\rho\in\mathbb{R}$ est acceptable avec $\rho\leqslant 0$

On peut écrire aussi $\boxed{z=\left[\rho\,,\theta\right]\,...}$

(mais ce n'est peut-être pas la forme trigonométrique de z).

Test 91 Trouver tous les complexes de partie réelle 2, dont $\dfrac{\pi}{3}$ est un argument.

Test 92 Trouver tous les cas d'égalité $\left[\rho\,,\theta\right]=\left[\rho'\,,\theta'\right]$.

Remarques : pour tous réels θ, θ' nous avons

- $\dfrac{1}{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}=\overline{e^{i\theta}}$
- $e^{i\theta}e^{i\theta'}=e^{i(\theta+\theta')}$
- $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}=e^{i(\theta-\theta')}$
- $1+e^{i\theta}=2e^{i\frac{\theta}{2}}\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$
- $1-e^{i\theta}=-2ie^{i\frac{\theta}{2}}\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$

4.2.3 Exponentielle complexe

Par définition : $\boxed{\forall\ z=x+i\,y,\ x,y\in\mathbb{R},\quad e^{z}=e^{\mathrm{Re}\ z}e^{i\,\mathrm{Im}\ z}=e^{x}\,\left(\cos y+i\,\sin y\right)}$

Cette notation est cohérente car :

- Si $z\in\mathbb{R}$, e^{z} coïncide avec l'exponentielle réelle
- $\forall(z,z')\in\mathbb{C}^2$, $e^{z+z'}=e^{z}e^{z'}$

Remarques :

- la fonction exp est $2i\pi$ périodique
- Pour tout nombre complexe z, le nombre complexe e^{z} est non nul et
$$|e^{z}|=e^{Re(z)}\qquad \arg(e^{z})\equiv Im(z)\quad[2\pi]$$
- si ρ est un réel strictement positif et θ un nombre réel :
$$e^{z}=\rho e^{i\theta}\Leftrightarrow z=\ln(\rho)+i(\theta+2k\pi),k\in\mathbb{Z}$$

Test 93 Soit $x\in\mathbb{R}$. Quand a-t-on $e^{i\,x}=1$?

Important:

Argument d'un produit :

$$\boxed{\forall\ z,z'\in\mathbb{C}^*,\quad \arg(z\,z')\equiv\arg(z)+\arg(z')\ [2\,\pi]}$$

Relations d'Euler :

$$\boxed{\forall\ \theta\in\mathbb{R},\quad \cos\theta=\frac{e^{\,i\,\theta}+e^{-i\,\theta}}{2}\qquad \sin\theta=\frac{e^{\,i\,\theta}-e^{-i\,\theta}}{2\,i}}$$

Formule de **Moivre** [a] :

$$\boxed{\forall\ (\theta,n)\in\mathbb{R}\times\mathbb{Z},\quad \left(\cos\theta+i\,\sin\theta\right)^{n}=\cos(n\,\theta)+i\,\sin(n\,\theta)}$$

a. Abraham de Moivre (1667-1754) c'est également lui qui a découvert la formule (dite) de Stirling qui donne un équivalent en l'infini de $n!$ . . .

Test 94 | Module et argument de $\sin\theta + i\,\cos\theta$

Test 95 | Module et argument de $z = 1 + e^{i\,\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$ (Faire attention...)

4.2.4 Linéarisation, factorisation

Calcul de $\cos(n\,\theta)$, et $\sin(n\,\theta)$

BUT

Obtenir une expression en $\sin\theta$ et ou $\cos\theta$ afin de factoriser ou de changer de variable...

Méthode

- ▷ Utiliser la formule de Moivre
- ▷ Utiliser le binôme de Newton

  (voir l'alternance des + et -, des réels et imaginaires purs)
- ▷ Éventuellement utiliser $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ (ou le contraire). □ **Binôme newton**

Test 96 | Transformer $\sin(5\,\theta)$ et $\cos(4\,\theta)$

Linéarisation de $\cos^n\theta$ et $\sin^n\theta$

BUT

Trouver des primitives...

Méthode

- ▷ Utiliser la relation d'Euler appropriée
- ▷ Utiliser le binôme de newton
- ▷ Remarquer la progression des exposants de 2 en 2 et éventuellement l'alternance des signes
- ▷ Regrouper les termes associés

Test 97 | Chercher une primitive de $\sin^6 x$.

Calcul de certaines sommes

Méthode

Interpréter la somme comme la partie réelle ou la partie imaginaire d'une somme de nombres complexes.

L'exemple le plus classique[4] est le calcul, pour tout $x \not\equiv 0\ [2\,\pi]$, de

$$\sum_{k=0}^{n}\cos(k\,x) = \frac{\cos\frac{n\,x}{2}\,\sin\frac{(n+1)\,x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n}\sin(k\,x) = \frac{\sin\frac{n\,x}{2}\,\sin\frac{(n+1)\,x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

Test 98 | Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(k\,x)$

4.3 Équations algébriques

4.3.1 Racines n^{eme} d'un complexe

$z \in \mathbb{C}$ est une **racine n^{eme}** de $Z \in \mathbb{C}$[5] si et seulement si $z^n = Z$.

Th. ▷ **Racines nèmes d'un complexe non nul, avec $n \in \mathbb{N}^*$**

Tout complexe non nul $Z = R\,e^{i\,\Theta}$ $(R > 0)$ admet exactement n racines nème qui sont obtenues en identifiant module et argument.

$$\sqrt[n]{R}\;e^{\left(i\,\frac{\Theta + 2\,k\,\pi}{n}\right)}, \quad k \in [\![0, n-1]\!]$$

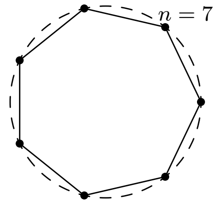
4. Il est important de savoir retrouver ces résultats
5. On dit aussi "racine d'ordre n de Z.

4.3.2 Racines n^{eme} de l'unité

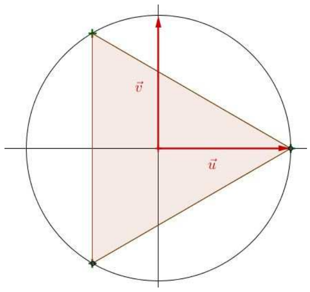
Une **racine n^{eme} de l'unité** est une racine n^{eme} de 1, avec $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n^{eme} de l'unité.

conséquences :

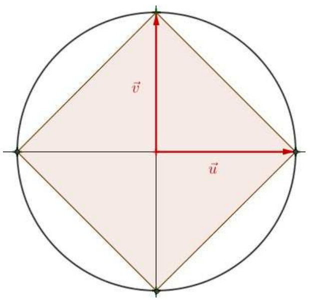
- Il y a exactement n racines n^{eme} de l'unité $\quad (n \geqslant 1)$
- Ces racines sont $\boxed{\rho^0, \rho^1, \rho^2, \cdots, \rho^{n-1} \quad \text{où} \quad \rho = e^{i\,2\pi/n}}$
- Leurs images forment un polygone régulier



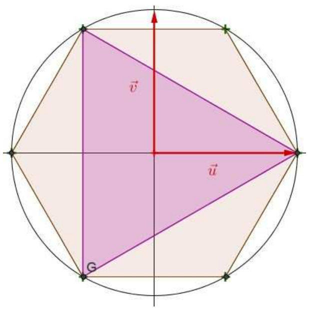
Les éléments de $\mathbb{U}_3$ (1, j et $j^2 = \overline{j}$) sont les affixes des sommets d'un triangle équilatéral.



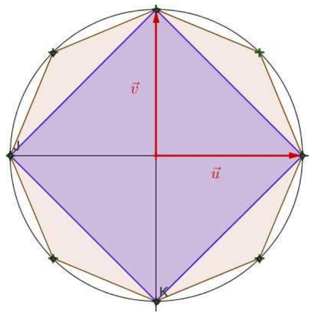
Les éléments de $\mathbb{U}_4$ (1, i, $i^2 = -1$ et $i^3 = -i$) sont les affixes des sommets d'un carré (de plus $\mathbb{U}_4$ contient $\mathbb{U}_2$).



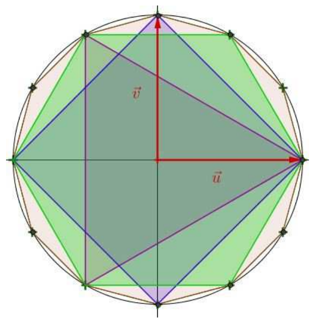
Les éléments de $\mathbb{U}_6$ sont les affixes des sommets d'un hexagone régulier (de plus $\mathbb{U}_6$ contient $\mathbb{U}_3$ et $\mathbb{U}_2$).



Les éléments de $\mathbb{U}_8$ sont les affixes des sommets d'un octogone régulier (de plus $\mathbb{U}_8$ contient $\mathbb{U}_4$ et $\mathbb{U}_2$).



Les éléments de $\mathbb{U}_{12}$ sont les affixes des sommets d'un dodécagone régulier (et $\mathbb{U}_{12}$ contient $\mathbb{U}_2$, $\mathbb{U}_3$, $\mathbb{U}_4$ et $\mathbb{U}_6$).



Trois résultats très utiles :

- Pour $n \geqslant 2$, la somme des racines de l'unité est nulle
- Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation
$$1 + x + x^2 + \cdots + x^m = 0$$
sont les racines $(m+1)^{eme}$ de l'unité, sauf "1".
- Toutes les racine n^{eme} de $Z \in \mathbb{C}^*$ sont obtenues en multipliant l'une d'elles par les racines n^{eme} de l'unité.

Test 99 — **Ce test est simple et important :** Soit z une racine n^{eme} de l'unité. Montrer que $\overline{z} = \dfrac{1}{z} = z^{n-1}$, $\quad \overline{z^k} = \dfrac{1}{z^k} = z^{n-k}$

Test 100 — Tout complexe de module 1 est-il une racine de l'unité ?

Racines cubiques de l'unité

- Ce sont $1, j$ et j^2 où $j = e^{i\,2\pi/3} = \dfrac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$
- $\overline{j} = j^2$ et $1 + j + j^2 = 0$

Test 101 Calculer $(2-i)^3$. En déduire les racines cubiques de $2 - 11\,i$.

Test 102 Quelles sont les racines quatrièmes de $(2-3\,i)^4$?

4.3.3 Racines carrées complexes

$z \in \mathbb{C}$ est une racine carrée complexe de Z si et seulement si $z^2 = Z$. C'est donc une racine d'ordre 2. Ainsi :

tout complexe non nul admet deux racines complexes opposées.

Un calcul algébrique est très simple soit $z = x + i\,y$, $Z = X + i\,Y, x, y, X, Y \in \mathbb{R}$

$$Z = z^2 \Leftrightarrow \begin{cases} X = x^2 - y^2 \\ Y = 2\,x\,y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X & = x^2 - y^2 \\ |Z| & = x^2 + y^2 \\ x\,y & \text{du signe de } Y \end{cases}$$

Test 103 Utiliser une racine carrée pour calculer $\sin\dfrac{\pi}{8}$.
On pourra remarquer que $\left(e^{i\frac{\pi}{8}}\right)^2 = e^{i\frac{\pi}{4}}$.

4.3.4 Équations du second degré

connaître la décomposition canonique

Une équation du second degré est de la forme

$$a\,z^2 + bz + c = 0,\ a, b, c \in \mathbb{C},\ a \neq 0$$

Les solutions de cette équation sont

$$z = \frac{-b \pm \delta}{2\,a} \quad \text{où } \delta \text{ est une racine carrée complexe de } \Delta = b^2 - 4\,a\,c\,.$$ [6]

Relations entre coefficients et racines

- Les solutions z_1, z_2 [a] de l'équation

$$az^2 + bz + c = 0,\ a \neq 0$$

vérifient $\boxed{s = z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a} \quad p = z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}}$

- Les complexes z_1, z_2 de somme s et de produit p sont les solutions de l'équation $\boxed{z^2 - s\,z + p = 0}$

a. racines distinctes ou confondues.

4.4 Nombres complexes et géométrie plane

4.4.1 Angles

Rappel : Dans le plan orienté :
- les angles de vecteurs (de demi-droites) sont mesurés "modulo 2π"
- les angles de droites sont mesurés "modulo π"
- il est commode d'identifier un angle et une de ses mesures

Soit $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$ quatre points du plan complexe (rapporté au repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$). Nous avons :

- $(\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OA}}) \equiv \arg(a)\ [2\,\pi]$ (si $O \neq A$)
- $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) \equiv \arg(\dfrac{b}{a})\ [2\,\pi]$ (si $O \neq A$ et $O \neq B$)
- $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}) \equiv \arg(\dfrac{d-c}{b-a})\ [2\,\pi]$ (si $A \neq B$ et $C \neq D$)

6. Δ est le **discriminant** de l'équation.

Ceci permet de traduire facilement :

- Le parallélisme $AB//CD \Leftrightarrow (d-c)\overline{(b-a)} = \overline{(d-c)}\,(b-a)$
- L'alignement A, B, C alignés $\Leftrightarrow AB//AC$
- L'orthogonalité $AB \perp CD \Leftrightarrow (d-c)\overline{(b-a)} + \overline{(d-c)}\,(b-a) = 0$

Test 104 Quelle est l'interprétation géométrique de $\arg(b-a) \equiv \arg(c-a)\ [2\pi]$?

Test 105 Soit $A(i)$, $B(-1)$ et $C(2-i)$. Trouver les points M de l'axe des réels tels que AM soit la bissectrice de (AB, AC).

4.4.2 Transformations du plan

A toute transformation du plan F, on associe une application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à tout complexe z, affixe d'un point M du plan, associe le complexe z', affixe du point M' du plan tel que $M' = F(M)$.
On dit F est représentée par f dans le plan complexe.

▷ Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan. La **translation de vecteur $\overrightarrow{u}$** est l'application du plan sur lui-même qui, à tout point M du plan associe le point M' défini par

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$$

Complexe La translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe b est représentée par l'application f du plan complexe sur lui-même qui à tout z complexe, d'image M associe l'unique complexe z', d'image M' définie par :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z+b \end{array}$$

▷ Soit Ω un point du plan, d'affixe ω et θ un réel. La **rotation de centre Ω et d'angle θ** est la transformation du plan qui à tout point M du plan différent de Ω, d'affixe z, associe le point M', d'affixe z', défini par :

$$\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}\right) = \theta$$

avec $\Omega M = \Omega M'$. L'image de Ω est lui-même.

Complexe La rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle θ réel est représentée par l'application f du plan complexe sur lui-même qui à tout z complexe, d'image M associe le complexe z', d'image M', définie par

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \omega + e^{i\theta}(z-\omega) \end{array}$$

▷ Soit Ω un point du plan, d'affixe ω et k un réel non nul.
L'**homothétie de centre Ω et de rapport k** est la transformation du plan qui à tout point M du plan, d'affixe z, associe le point M', d'affixe z', défini par :

$$\overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$$

Complexe L'homothétie de centre Ω d'affixe ω et de rapport $k \neq 0$ est représentée par l'application f du plan complexe sur lui-même qui à tout z complexe, d'image M associe le complexe z', d'image M', définie par :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \omega + k(z-\omega) \end{array}$$

▷ On appelle **similitude directe du plan** toute application du plan sur lui-même représentée par l'application $f : z \mapsto az + b$ où $(a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.
Ainsi les translations, homothéties et rotations sont des similitudes directes planes particulières.

Géométrie

Soit s une similitude directe, d'écriture complexe $z \mapsto az + b$ où $a \neq 0$.
Soient A et B deux points distincts du plan d'images respectives A' et B' par s.

- L'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{A'B'}})$ ne dépend pas des points A et B choisis, il est égal à $\arg(a)$.
  Cet angle est appelé angle de la similitude.
- Le quotient $\dfrac{A'B'}{AB}$ ne dépend pas des points A et B choisis, il est égal à $|a|$.
  Ce réel positif est appelé rapport de la similitude.
- Une similitude directe qui n'est pas une translation admet un unique point fixe, appelé centre de la similitude.

Th. ▷ **Description complète d'une similitude directe plane**

soit s une similitude directe de rapport k et d'angle θ. Deux cas sont possibles :

- s est une translation ($k = 1$ et $\theta \equiv 0$ modulo 2π).
- sinon, la similitude admet un point fixe Ω d'affixe ω, elle est alors la composée de
  - l'homothétie h de centre Ω et de rapport k
  - la rotation r de centre Ω et d'angle θ

  De plus h et r commutent : $h \circ r = r \circ h$. L'écriture complexe de s est alors

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto ke^{i\theta}(z - \omega) + \omega$$

Analytique → géométrique

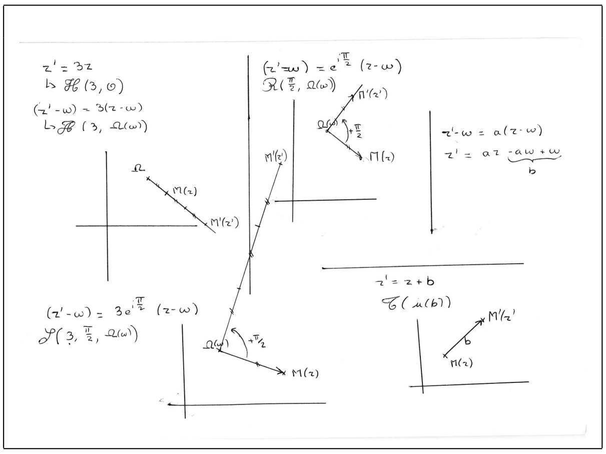
Considérons l'application du plan orienté

$$F : M(z) \ \mapsto\ M'(z') \text{ représentée par } f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto a\,z + b$$

- Si $a = 1, F$ est une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe b.

Lorsque $\boxed{a \neq 1}$, F est :

- une **homothétie :** ssi $a \in \mathbb{R}^*$
  - son rapport est a
  - son centre Ω est l'unique point invariant d'affixe $\omega = \dfrac{b}{1-a}$
- une **rotation :** ssi $|a| = 1$
  - son angle est $\arg(a)$
  - son centre Ω est l'unique point invariant d'affixe $\omega = \dfrac{b}{1-a}$
- une **similitude directe :**
  - son rapport est $|a|$
  - son angle est $\arg(a)$
  - son centre Ω est l'unique point invariant d'affixe $\omega = \dfrac{b}{1-a}$



  Alain Couteèle et Mélissa Bailloeuil

Test 106

Similitude déterminée par quatre points :
A, B, C, D sont quatre points distincts d'affixes respectives a, b, c, d.
Montrer qu'il existe une unique similitude plane directe $\mathcal{S}$ telle que $\mathcal{S}(A) = B$ et $\mathcal{S}(C) = D$.
Application numérique : $a = 2 - i$, $b = 2 + 3\,i$, $c = 1 + 2\,i$, $d = -5 + 4\,i$.

Test 107

Déterminer les éléments de la composée $h_1 \circ h_2$ des deux homothéties $h_1\left(\Omega_1(1), 2\right)$ et $h_2\left(\Omega_2(i), -3\right)$.
La composée de deux homothéties est-elle toujours une homothétie ?

Test 108

Soit $A(1-3i)$, $B(2-i)$. Trouver les affixes des points C et D tels que $ABCD$ soit un carré.

Test 109

Un grand classique (qu'il faut connaître...)
Montrer que les trois points $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ forment un triangle équilatéral direct si et seulement si $a + b\,j + c\,j^2 = 0$

Exercices

Dans tous ces exercices, lorsque des coordonnées sont utilisées, il est sous-entendu que le plan affine euclidien $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormal direct fixé $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

Calcul dans $\mathbb{C}$

Calculs algébriques de base

Exercice 1

Déterminer l'écriture algébrique des complexes suivants :

1. $\dfrac{1}{5-11i}$.
2. $\dfrac{(1+2i)^2-(1-i)^3}{(3+2i)^2-(2+i)^2}$.
3. $\dfrac{(2+i)^3+(1-i)^2}{1+i+(2i-1)^2}$.

Exercice 2

Ecrire sous forme polaire les complexes suivants :

1. $-4i+4$.
2. $\sqrt{2}-i\sqrt{6}$.

Exercice 3

Donner les écritures algébriques (simples) de $v = \left(1-i\sqrt{3}\right)^{11}$ et $w = \left(\dfrac{2-2i}{\sqrt{3}+i}\right)^{20}$.

Exercice 4

Soit z un complexe non nul. Exprimer simplement, uniquement à l'aide de $|z|$, $\mathrm{Re}\,(z)$ et $\mathrm{Im}\,(z)$, les réels $\mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{z}\right)$ et $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right)$.

Exercice 5

Soit $\omega > 0$, et f une fonction réelle de la variable réelle. Démontrer l'équivalence des trois énoncés suivants.

1. Il existe A et B réels tels que quel que soit $t \in \mathbb{R}$, on a
$$f(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$
2. Il existe C complexe tels que quel que soit $t \in \mathbb{R}$, on a
$$f(t) = C\exp(i\omega t) + \overline{C}\,\exp(-i\omega t)$$
3. Il existe $K \geq 0$ et $\phi \in \mathbb{R}$ tels que quel que soit $t \in \mathbb{R}$, on a
$$f(t) = K\cos(\omega t - \phi)$$

Exercice 6

Utilisation de l'inégalité triangulaire

Soient z_1 et z_2 deux complexes. Montrer que

$$|z_1| + |z_2| \leq |z_1+z_2| + |z_1-z_2| \leq 2\big(|z_1|+|z_2|\big)$$

Calculs de sommes

Soient a, b et x trois réels (choisis de sorte que les expressions aient un sens).

Exercice 7

Simplifier $A = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(ka+b)$ et $B = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(ka+b)$.

Exercice 8

Simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(ka)}{\cos^k a}$.

Relations coefficients-racines

Exercice 9

Résoudre l'équation suivante d'inconnue n dans $\mathbb{Z}$:

$$\left(1+\frac{i}{\sqrt{3}}\right)^n - \left(1-\frac{i}{\sqrt{3}}\right)^n = 0$$

Exercice 10

Soit $\alpha = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{7}\right)$. On pose $S = \alpha + \alpha^2 + \alpha^4$ et $T = \alpha^3 + \alpha^5 + \alpha^6$.

1. Montrer que S et T sont complexes conjugués, et que $\operatorname{Im}(S) > 0$.
2. Calculer $S+T$ et ST.
3. En déduire S et T.

Complexes et géométrie

Exercice 11

Déterminer l'expression analytique de la rotation de centre $A(2,4)$ et d'angle $\pi/2$.

Exercice 12

Caractériser géométriquement la transformation $z \mapsto \dfrac{i-1}{\sqrt{2}} z + 5i$.

Exercice 13

Trouver l'ensemble des nombres complexes z tels que les points d'affixe z, z^2 et z^3 soient alignés.

Racines n-ièmes

Exercice 14

Déterminer les racines cubiques de $1 + i\sqrt{3}$.

Exercice 15

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier supérieur ou égal à 2.

1. Calculer les racines n-ièmes de $-i$ et de $1+i$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - z + 1 - i = 0$.
3. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^{2n} - z^n + 1 - i = 0$

4.5 Exercices Complémentaires

Exercice 1

Utilisation des propriétés algébriques de la conjugaison

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$. On pose $Z = \dfrac{1+iz}{1-iz}$.

1. Pour quels z complexes Z est-il réel ?
2. Pour quels z complexes Z est-il de module 1 ?
3. Pour quels z complexes Z est-il imaginaire pur ?

Exercice 2

Simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos^2(ka)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin^2(ka)$.

Exercice 3

Exprimer $\cos(nx)$ et $\dfrac{\sin(nx)}{\sin x}$ comme polynômes en $\cos x$

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} z_1 + z_2 = 3 \\ z_1 z_2 = 2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} z_1 + z_2 = i \\ z_1 z_2 = i - 1 \end{cases}$
3. $\begin{cases} e^{z_1} + e^{z_2} = 2 \\ e^{z_1 + z_2} = 1 \end{cases}$

Exercice 5

Déterminer analytiquement l'homothétie de rapport -2 et de centre $B(0,1)$.

Exercice 6

Déterminer géométriquement la transformation $z \mapsto (\sqrt{3} + 3i)z + 1$.

Exercice 7

Calculer de deux manières différentes les racines complexes quatrièmes de -4.

