

# Chapitre 3

## Équations différentielles et primitives

Dans ce chapitre,  $\mathbb{K}$  désigne soit  $\mathbb{R}$ , soit  $\mathbb{C}$ .

### 3.1 Primitives usuelles

Dans cette partie, les fonctions considérées sont à valeurs réelles ou complexes. Les propriétés et théorèmes seront démontrées ultérieurement dans le chapitre Intégration

#### 3.1.1 Définition de primitive

Une primitive de  $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$  sur l'intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  est une fonction  $F$ , dérivable sur  $I$  telle que  $F' = f$ .

##### Th. ▷ Ensemble des primitives

Si  $F$  est une primitive de  $f$  sur l'intervalle  $I$ , alors les primitives de  $f$  sur  $I$  sont les fonctions  $F + \lambda, \lambda \in \mathbb{K}$ .

**Attention :**

- Ceci n'est valable que sur un intervalle.
- Dans ces conditions, il existe une et une seule primitive qui prend une valeur donnée  $b$  en un point  $a \in I$ .

##### Th. ▷ Théorème de Leibniz

Si  $f$  est continue sur  $I$  alors

$$\forall a \in I, \quad F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt \text{ est une primitive de } f \text{ sur } I$$

Plus précisément,  $F$  est la primitive qui s'annule en  $a$ .

*Remarque :* On note  $f$  continue sur  $I$  par  $f \in \mathcal{C}^0(I)$  et ce théorème sera démontré dans le chapitre intégration.

##### Corollaire

$$f \text{ est continue sur } [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(t) dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

où  $F$  est une primitive quelconque de  $f$  sur  $[a, b]$

#### Test 60

Si  $f$  est dérivable sur  $[a, b]$ , peut-on dire que  $\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a)$  ?



**Test 61**

$f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ . Les fonctions suivantes sont-elles des primitives de  $f$ ? (On pourra noter  $F$  une primitive de  $f$ .)

$$g_1(x) = \int_x^0 f(t) dt \quad g_2(x) = \int_0^{2x} f(t) dt$$

Sont-elles dérivables? Si oui, calculer la dérivée.

**Test 62**

$f$  est continue sur l'intervalle  $I$ . Notons  $F$  une primitive de  $f$  sur  $I$ .

Montrer que la fonction  $g$  définie sur  $I$  par  $g(x) = \int_x^{x^2} f(t) dt$  est dérivable sur  $I$ , et calculer la dérivée.

### 3.1.2 Primitives usuelles

**Notation :** Avec des bornes :  $\int_a^b f$  est une intégrale (c'est un scalaire)

Sans les bornes<sup>1</sup> :  $\int f$  désigne une primitive quelconque de  $f$

Cette notation ne désigne pas une fonction précise

| intervalle                           | $f(x)$                              | $\int f(x) dx$                 |
|--------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------|
| $\mathbb{R}$                         | $x^n \ (n \in \mathbb{N})$          | $\frac{x^{n+1}}{n+1} + C^{te}$ |
| $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ | $x^n \ (n \in \mathbb{Z} - \{-1\})$ | $\frac{x^{n+1}}{n+1} + C^{te}$ |
| $\mathbb{R}_+^*$                     | $x^a \ (a \in \mathbb{R} - \{-1\})$ | $\frac{x^{a+1}}{a+1} + C^{te}$ |
| $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ | $\frac{1}{x}$                       | $\ln x  + C^{te}$              |
| $\mathbb{R}$                         | $e^x$                               | $e^x + C^{te}$                 |
| $\mathbb{R}_+^*$                     | $\ln x$                             | $x \ln(x) - x + C^{te}$        |
| $\mathbb{R}$                         | $\sin x$                            | $-\cos x + C^{te}$             |
| $\mathbb{R}$                         | $\cos x$                            | $\sin x + C^{te}$              |

| condition                                      | $f(x)$                                 | $\int f(x) dx$                 |
|------------------------------------------------|----------------------------------------|--------------------------------|
| $u \in \mathcal{C}^1(I)$                       | $u^n u' \ (n \in \mathbb{N})$          | $\frac{u^{n+1}}{n+1} + C^{te}$ |
| $u \in \mathcal{C}^1(I)$ et $u > 0$ ou $u < 0$ | $u^n u' \ (n \in \mathbb{Z} - \{-1\})$ | $\frac{u^{n+1}}{n+1} + C^{te}$ |
| $u \in \mathcal{C}^1(I)$ et $u > 0$            | $u^a u' \ (a \in \mathbb{R} - \{-1\})$ | $\frac{u^{a+1}}{a+1} + C^{te}$ |
| $u \in \mathcal{C}^1(I)$ et $u > 0$ ou $u < 0$ | $\frac{u'}{u}$                         | $\ln u  + C^{te}$              |
| $u \in \mathcal{C}^1(I)$                       | $e^u u'$                               | $e^u + C^{te}$                 |
| $u \in \mathcal{C}^1(I)$                       | $u' \sin u$                            | $-\cos u + C^{te}$             |
| $u \in \mathcal{C}^1(I)$                       | $u' \cos u$                            | $\sin u + C^{te}$              |

**Test 63**

Donner des primitives de

$$\sin(2x) \quad 2 \sin(x) \cos(x) \quad |x|$$

On précisera sur quel intervalle on les détermine.

### 3.1.3 Formules d'intégration



**Th.** ▷ Intégration par parties :

Si  $f$  et  $g$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a, b]$  :

$$\int_a^b (f'g) = [fg]_a^b - \int_a^b (fg')$$

Quelques usages classiques de ce type d'intégration sont :



1. On dit parfois "intégrale indéfinie" :  $\int f(x) dx = \int_a^x f(t) dt + C^{te}$

- Dans une intégrale de la forme  $\int_a^b P(t) f(t) dt$ ,  
on supprime le facteur polynômial  
(chaque intégration par partie diminue son degré d'une unité).
- Après une ou plusieurs intégrations par parties,  
on retrouve l'intégrale initiale.  
(Cette intégrale est alors solution d'une équation algébrique.)
- Calculer une intégrale par récurrence.

**Test 64**

$$\text{Calculer } \int_a^b x \sin(x) dx \quad \int_a^b x^2 \sin(x) dx$$

**Test 65**

$$\text{En utilisant une intégration par parties, calculer } \int_1^5 x e^{(2x)} dx.$$

**Test 66**

$$\text{En utilisant une intégration par parties, calculer } \int_1^5 x \ln(x) dx.$$

**Th.**  $\triangleright$  Intégration par changement de variable :

Si  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a, b]$ , et  $f$  continue sur  $\varphi([a, b])$ , alors

$$\int_a^b f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt$$

Note :  $\varphi([a, b]) \supset [\varphi(a), \varphi(b)]$



Remarque : On dit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  lorsque  $f$  est continue et de dérivée continue sur  $I$ .

**Remarques**

- Il n'est pas nécessaire que  $\varphi$  soit une bijection.
- Par contre la continuité de  $f$  sur  $[\varphi(a), \varphi(b)]$  peut ne pas suffire.
- Bien s'assurer que le changement de variable est de classe  $\mathcal{C}^1$
- L'usage de la notation différentielle est très commode :  

$$t = \varphi(x) \Rightarrow dt = \varphi'(x) dx \Rightarrow f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = f(t) dt$$
 (il reste à déterminer les bornes.)
- Par un changement de la forme  $x = \alpha t + \beta$ , on peut transformer l'intervalle d'intégration  $[a, b]$  en  $[0, 1]$  ou en  $[-1, 1]$ .

**Test 67**

$$\text{Trouver } \alpha \text{ et } \beta \text{ pour que le changement de variable } x = \alpha t + \beta \text{ transforme } \int_a^b f(x) dx \\ \text{en } \int_0^1 f(\alpha t + \beta) \alpha dt, \text{ puis en } \int_{-1}^1 f(\alpha t + \beta) \alpha dt$$

Cette formule s'utilise dans les 2 sens

$\blacktriangleright$  "de gauche à droite"

**Exemples**

- $\int_{-1}^2 \frac{2x}{1+x^2} dx$  devient  $\int_2^5 \frac{1}{u} du$   
 car  $u : x \mapsto 1+x^2 \in \mathcal{C}^1$  sur  $[-1, 2]$  et  $f : u \mapsto \frac{1}{u}$  continue sur  $u([-1, 2]) = [1, 5]$
- $I = \int_0^3 x \sqrt{1+x} dx$  devient  $\int_1^2 2(u^2-1)u^2 du$   
 car  
 $\sqrt{1+x} = u \Rightarrow 1+x = u^2 \Rightarrow dx = 2u du \Rightarrow x \sqrt{1+x} dx = (u^2-1)u^2 du$   
 $f(x) = \varphi(x, u(x)) = g(u(x)) u'(x)$  où  $u : x \mapsto \sqrt{1+x}$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $[1, 2]$   
 et  $f$  continue sur  $u([0, 3]) = [1, 2]$

$\blacktriangleright$  "de droite à gauche"

**Exemples**  $\left| \begin{array}{l} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \text{ devient } \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt \\ \text{car } \sin \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0, \frac{\pi}{2}] \text{ et } f \text{ continue sur } \sin([0, \frac{\pi}{2}]) = [0, 1] \\ \textbf{Attention : } I \neq \int_0^{5\pi/2} \cos^2 t dt \text{ (problème du signe du cos)} \end{array} \right.$

**Test 68**  $\left| \begin{array}{l} \text{Intégrales de la forme } f(u)u' : \text{ primitiver} \\ \int^x \frac{\ln(\ln t)}{t} dt \quad \int^x t \sqrt{1+t^2} dt \quad \int^x \frac{\sin t}{\cos^3 t} dt \quad \int^x \frac{\sin^3 t}{\cos t} dt \end{array} \right.$

**Test 69**  $\left| \begin{array}{l} \bullet \text{ Justifier l'existence de } I = \int_0^{\pi/2} \cos(x) \sqrt{\sin x} dx \\ \bullet \text{ Calculer } I \text{ en utilisant le changement de variable } \sin x = t. \\ \bullet \text{ Retrouver ce dernier résultat en posant } \sin x = u^2 ? \end{array} \right.$

**Test 70**  $\left| \begin{array}{l} \text{(Plus difficile) Effectuer le changement de variable } x^2 = u \text{ pour transformer} \\ I = \int_1^2 2x f(x^2) dx \text{ et } J = \int_{-1}^2 2x f(x^2) dx. \text{ Qu'en déduisez-vous ?} \\ \text{Appliquer ceci pour } f(x) = \sin(x), \text{ puis } f(x) = \sqrt{x}. \\ \text{Dans ce dernier cas, a-t-on } J = \int_{-1}^2 2x^2 dx ? \text{ Pourquoi ?} \end{array} \right.$

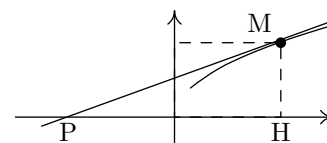
**Test 71**  $\left| \begin{array}{l} \text{Intégrer } \int_0^1 x \sqrt{1-x^2} dx \text{ en posant } x = \sin t \end{array} \right.$

## 3.2 Généralités sur les équations différentielles

### 3.2.1 Introduction

En mathématiques et en physique, la traduction de certaines conditions ou phénomènes naturels conduit souvent obtenir un lien entre une fonction et ses dérivées. C'est une "équation différentielle".

*Exemple :* trouver une courbe  $\Gamma$  d'équation  $y = f(x)$  telle que, en tout point  $M(x, y) \in \Gamma$ , la tangente en  $M$  passe par le point  $P$ , symétrique par rapport à l'origine de la projection de  $M$  sur l'axe des ordonnées.



### 3.2.2 Vocabulaire

#### Équations différentielles du premier ordre

**Introduction**  $\left| \begin{array}{l} \text{Étudions un exemple concret :} \end{array} \right.$

Soit l'équation différentielle (E) :  $xyy' + y^2 = \sin x$ .

*Note :*  $y$  est une fonction, et  $y'$  est sa dérivée.

Sous forme résolue, (E) devient  $y' = \frac{\sin(x) - y^2}{xy} = f(x, y)$

où  $f$  est définie sur  $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \text{ et } y \neq 0\}$

$y' = f(x, y)$  est une équation différentielle du premier ordre

lorsque  $f$  est une application de  $\mathcal{D}$  vers  $\mathbb{K}$   
 où  $\mathbb{K}$  est généralement  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$   
 et  $\mathcal{D}$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{R} \times \mathbb{K}$

#### Vocabulaire

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

- une **solution sur  $I$**  de l'équation différentielle,  
 est une **fonction**  $y : I \rightarrow \mathbb{K}$  qui vérifie :  
 $\forall x \in I, (x, y(x)) \in \mathcal{D}$  et  $y'(x) = f(x, y(x))$
- **Résoudre sur  $I$**  (ou encore **intégrer sur  $I$** ) l'équation  
 différentielle, c'est rechercher **toutes** les solutions sur  $I$ .
- Une solution  $y$  vérifie la **condition initiale**  $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$   
 si et seulement si elle vérifie  $y(x_0) = y_0$ .<sup>2</sup>

#### Test 72

Transformez <sup>a</sup>  $(E) : yy' + \ln x = xy'$  en une équation différentielle du premier ordre.  
 Précisez alors l'ensemble  $\mathcal{D}$ .

a.  $(E)$  est déjà une équation différentielle. La transformation consiste à la mettre sous sa forme dite **résolue**.

**Équations différentielles du second ordre** C'est une simple adaptation de ce qui précède, l'équation  $y'' = f(x, y, y')$  est étant associée à la fonction  $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ .

Une condition de Cauchy est un triplet  $(x_0, y_0, y'_0) \in \mathcal{D}$

#### Test 73

Trouver les solutions polynomiales de degré au plus 2 de l'équation  $2 - y' + xy'' = 0$   
 (On pourrait remarquer qu'un polynôme solution est forcément de degré au plus 2)

### 3.2.3 Cas de la fonction exponentielle

#### Caractérisation par une équation différentielle

Si  $\alpha$  est un complexe, l'application  $\varphi_\alpha \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{C} \\ x & \mapsto e^{\alpha x} \end{cases}$  est définie, continue, dérivable sur  $\mathbb{R}$ , avec  $\varphi'_\alpha(x) = \alpha e^{\alpha x}$ . On peut donc dire que  $\varphi_\alpha$  est **une** solution de l'équation différentielle  $(E) : y' = \alpha y$ . De plus,  $\varphi_\alpha$  vérifie la condition initiale  $\varphi_\alpha(0) = 1$ .

**Th.**  $\triangleright$  **Solutions de l'équation différentielle  $y' = \alpha y, \alpha \in \mathbb{C}$**

Les solutions sur  $\mathbb{R}$  de cette équation sont les fonctions

$$x \mapsto \lambda e^{\alpha x}, \alpha, \lambda \in \mathbb{C}$$

$x \mapsto e^{\alpha x}$  est la seule solution qui vérifie la condition initiale  $(0, 1)$ .

**Th.**  $\triangleright$  **Caractérisation par une équation fonctionnelle**

Les fonctions  $\varphi$ , dérivables sur  $\mathbb{R}$  qui vérifient

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \varphi(x + y) = \varphi(x)\varphi(y)$$

sont • la fonction nulle

- les fonctions exponentielles (de la forme  $x \mapsto e^{\alpha x}, \alpha \in \mathbb{C}$ )

#### Test 74

1. Trouver une équation différentielle simple, d'ordre 2, dont "sin" est une des solutions.
2. Trouver une équation différentielle simple d'ordre 1 qu'on ne cherchera pas à mettre sous sa forme résolue dont "cos" est une des solution
3. Trouver une équation différentielle simple, d'ordre 2, dont  $x \mapsto e^{2x}$  est solution.

2. C'est un "problème de **Cauchy**"



### 3.3 Équations linéaires d'ordre 1

#### 3.3.1 Généralités

Une équation linéaire du premier ordre est une équation différentielle qui peut se mettre sous la forme

$$y' + a(x)y = b(x)$$

où  $a, b$  sont deux fonctions continues sur un même intervalle  $I \subset \mathbb{R}$ , à valeurs dans  $\mathbb{K}$ .

$y' + a(x)y = 0$  est l'équation homogène associée.

**Test 75**

Quelles sont les équations linéaires ?

1 :  $y' + y = 2 + x$     2 :  $xy' + x^2 \cos x = y(1 - x)$     3 :  $dy = (1 - y) dx$

4 :  $y' = y(xy + 1)$     5 :  $1 + y^2 = y'(x - \sqrt{y})$

#### 3.3.2 Pourquoi "linéaire" ?

**Th.** ▷ Propriétés d'une équation différentielle linéaire

Pour une équation différentielle linéaire du premier ordre  $(E)$  nous avons :

► **L'ensemble  $\mathcal{E}$  des solutions de l'équation homogène est :**

▷ stable pour l'addition :  $\forall y_1, y_2 \in \mathcal{E}, y_1 + y_2 \in \mathcal{E}$

▷ stable pour la multiplication externe :  $\forall y \in \mathcal{E}, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda y \in \mathcal{E}$

► **La solution générale de l'équation avec second membre :**

c'est la somme d'une solution particulière de l'équation avec second membre et de la solution générale de l'équation sans second membre associée.

► **Le principe de superposition :**

Si l'équation est de la forme  $(E) : y' + a(x)y = b_1(x) + \beta b_2(x)$ , une solution particulière de  $(E)$  est  $y_1 + \beta y_2$ , où

▷  $y_1$  est une solution particulière de  $(E_1) : y' + a(x)y = b_1(x)$

▷  $y_2$  une solution de  $(E_2) : y' + a(x)y = b_2(x)$ .

#### 3.3.3 Résolution de l'équation homogène



**Th.** ▷ Solutions de  $y' + a(x)y = 0$

Soit  $a$  continue sur  $I$ .

Les solutions de  $y' + a(x)y = 0$  sur  $I$  sont les fonctions

$$y : x \mapsto \lambda \exp\left(\int^x -a(t) dt\right) = \lambda e^{-A(x)}$$

où  $\lambda \in \mathbb{K}$  et  $A$  est une primitive de  $a$  sur  $I$ .

**Test 76**

Résoudre les équations homogènes des équations linéaires du test précédent.

#### 3.3.4 Recherche d'une solution particulière

Nous avons vu que pour achever la résolution de l'équation avec second membre, il suffit de connaître une solution particulière (*une seule suffit*).

**Existence d'une solution évidente :**

il est alors inutile d'aller chercher plus loin.

**Recherche d'une solution sous une forme particulière**

parfois, il semble que certaines fonctions semblent de bons candidats pour être une solution particulière. On les recherche alors sous cette forme (mais le succès n'est pas assuré).

Test 77

Pour chacune des équations suivantes, rechercher une solution particulière sous une forme que l'on déterminera. (On ne demande pas la résolution générale)

1 :  $xy' + y = 3x^2 + 2x + 1$       2 :  $y' + y = 3 \cos x - \sin x$   
3 :  $y' + y = x + e^x + \sin x$

### Méthode de "variation de la constante"

Cette méthode est infaillible mais souvent plus lourde.

La solution générale de l'équation homogène étant de la forme  $y = \lambda e^{-A(x)}$ , on cherche une solution particulière sous la forme  $y_0 = \lambda(x) e^{-A(x)}$  : d'où  $\lambda'$ , dont on déduit une fonction  $\lambda$ , puis une solution particulière  $y_0$ .

Test 78

Résoudre l'équation différentielle  $y' + \frac{1}{x}y = \frac{x}{x-1}$  sur  $]1; +\infty[$ .  
Dans l'application de la méthode de la variation de la constante, il nous faudra une primitive de  $x \mapsto \frac{x^2}{x-1}$ , on pourra alors se servir de l'égalité valable pour tout  $x$  de  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  :  $\frac{x^2}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1}$ .

### 3.3.5 Cas d'une condition initiale

Th. ▷ Problème de Cauchy

Si  $a$  et  $b$  sont continues sur l'intervalle  $I$ , et si  $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$ , alors il existe une unique solution de l'équation  $y' + a(x)y = b(x)$  qui satisfait au problème de Cauchy  $y(x_0) = y_0$ .

## 3.4 Équations linéaire d'ordre deux à coefficients constants

### 3.4.1 Définitions

- C'est une équation de la forme  $ay'' + by' + cy = f(x)$ ,  
où  $a, b, c \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq 0$ ,  $f$  est continue sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ .
- $ay'' + by' + cy = 0$  est l'équation homogène associée.
- L'équation  $ar^2 + br + c = 0$  est l'équation caractéristique.

Test 79

Quelles sont les équations linéaires ?

1 :  $y'' - 6y' + 13y = 4$       2 :  $y'' + 3y' + 2y = 1 + x + x^2$   
3 :  $y'' - 4y = xe^{2x}$       4 :  $y''^2 + 4y'^2 + y^2 + 2(yy'' - 2yy' - 2y'y'') = e^{2x}$   
5 :  $y y'' = x y \sin x$  (attention aux pièges !)

### 3.4.2 Équation linéaire

Les conséquences sont donc les mêmes que pour une équation du premier ordre :

- ▷ Les solutions de l'équation homogène sont stables pour l'addition et pour la multiplication par une constante
- ▷ La solution générale de  $(E)$  s'obtient en ajoutant une solution particulière de  $(E)$  à la solution générale de l'équation homogène.
- ▷ *Principe de superposition* : si  $f(x)$  est de la forme  $f_1(x) + \beta f_2(x)$ , une solution particulière de  $(E)$  est  $y_1 + \beta y_2$ , où
  - $y_1$  est une solution particulière de  $(E_1)$  :  $ay'' + by' + cy = f_1(x)$
  - $y_2$  une solution de  $(E_2)$  :  $ay'' + by' + cy = f_2(x)$ .

### 3.4.3 Résolution de l'équation homogène

**Th.** ▷ **Solution exponentielle de l'équation homogène :**

L'application  $x \mapsto e^{\alpha x}$  est solution de l'équation  $ay'' + by' + cy = 0$  si et seulement si  $\alpha$  est solution de l'équation caractéristique  $ar^2 + br + c = 0$ .

**Th.** ▷ **Solutions complexes de l'équation homogène**

Soit  $(E) : ay'' + by' + cy = 0$  une équation différentielle à coefficients constants. Si l'équation caractéristique admet :

▷ *deux racines distinctes*  $r_1$  et  $r_2$

alors, les solutions de  $(E)$  sont  $y : x \mapsto A_1 e^{r_1 x} + A_2 e^{r_2 x}, \quad A_1, A_2 \in \mathbb{C}$

▷ *une racine double*  $r_1 = r_2$

alors, les solutions de  $(E)$  sont  $y : x \mapsto (A_1 + x A_2) e^{r_1 x}, \quad A_1, A_2 \in \mathbb{C}$

**Test 80**

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations homogènes des équations linéaires du test précédent.

**Th.** ▷ **Solutions réelles de l'équation homogène**

Soit l'équation  $ay'' + by' + cy = 0$  à coefficients constants réels. Si l'équation caractéristique admet :

▷ *deux racines réelles distinctes*  $r_1$  et  $r_2$ , alors, les solutions réelles

sont les fonctions  $y : x \mapsto A_1 e^{r_1 x} + A_2 e^{r_2 x}, \quad A_1, A_2 \in \mathbb{R}$

▷ *une racine réelle double*  $r_1 = r_2$ , alors, les solutions réelles

sont les fonctions  $y : x \mapsto (A_1 + x A_2) e^{r_1 x}, \quad A_1, A_2 \in \mathbb{R}$

▷ *deux racines non réelles conjuguées*  $\alpha \pm i\beta$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , alors, les solutions réelles sont les fonctions

$y : x \mapsto e^{\alpha x} (A_1 \cos(\beta x) + A_2 \sin(\beta x)), \quad A_1, A_2 \in \mathbb{R}$

**Test 81**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations homogènes des équations linéaires du test précédent.

### 3.4.4 Recherche d'une solution particulière

On ne traite ici que quelques cas particuliers.

**Si  $f(x)$  est de la forme  $P(x)e^{\alpha x}$ ,  $P$  polynôme de degré  $n$**

- L'équation  $ay'' + by' + cy = f(x)$  admet une solution particulière sous la forme  $Q(x)e^{\alpha x}$ , où  $Q$  est un polynôme

- de degré  $n$  si  $\alpha$  n'est pas solution de l'équation caractéristique
- de degré  $n + 1$  si  $\alpha$  est racine simple de l'équation caractéristique
- de degré  $n + 2$  si  $\alpha$  est racine double de l'équation caractéristique

- On obtient  $Q$  par identification.

**Si  $f(x)$  est de la forme  $\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x)$**

- L'équation  $ay'' + by' + cy = f(x)$  admet une solution particulière sous la forme  $P(x) \cos(\beta x) + Q(x) \sin(\beta x)$  où  $P, Q$  sont des polynômes

- de degré 0 si  $i\beta$  n'est pas solution de l'équation caractéristique
- de degré 1 si  $i\beta$  est racine simple de l'équation caractéristique
- de degré 2 si  $\beta$  est racine double de l'équation caractéristique



- On obtient  $P$  et  $Q$  par identification.

**Remarque**

Il est souvent plus rapide de chercher une solution sous une forme adaptée, en procédant par identification.


**Test 82**

Indiquer le forme d'une solution particulière des équations linéaires du test précédent. (On ne demande pas le calcul effectif)

**Test 83**

Intégrer dans  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle  $y'' + 4y = 4 \sin(2x)$

### 3.4.5 Condition initiale

Pour une équation du second ordre, une condition initiale est un triplet  $(\alpha, \beta, \gamma)$ .

La solution  $y$  de l'équation différentielle vérifie la condition initiale<sup>3</sup> si et seulement si

$$y(\alpha) = \beta \quad \text{et} \quad y'(\alpha) = \gamma$$

**Th.**

▷ **Equation linéaire et condition initiale (admis)**

|| Pour toute équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, il existe une et une seule solution qui vérifie les conditions initiales.




---

3. Ou "condition de Cauchy"

### 3.5 Exercices

#### Exercice 1

Justifier l'existence des intégrales suivantes puis les calculer.

$$\left. \begin{array}{l} A = \int_0^2 3x^4 + 5x + e^{3x} dx \\ B = \int_1^0 (x^2 + 1)e^{x^3+3x} dx \end{array} \right| \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, C_n = \int_0^n t^n dt \\ D = \int_0^1 \frac{5x}{1+x^2} dx \end{array} \left| \begin{array}{l} E = \int_0^1 \frac{5x}{(1+x^2)^2} dx \\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, F_n = \int_0^1 \frac{5t}{(1+t^2)^n} dt \end{array} \right.$$

#### Exercice 2

**Intégration par parties**

$$J = \int_{-1}^1 x e^{3x} dx \quad K = \int_0^1 (x^2 + x) e^{2x} dx \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, L_n = \int_1^e t^n \ln t dt$$

#### Exercice 3

**Changement de variable**

$$O = \int_0^1 x \sqrt{3x+1} dx \quad (u = 3x+1) \quad P = \int_1^e \frac{\ln t}{t} dt \quad (x = \ln t) \quad Q = \int_1^2 3y \sqrt{5-2y} dy \quad (x = 5-2y)$$

### Equations différentielles linéaires d'ordre 1

#### Exercice 4

Résoudre l'équation différentielle  $y' + xy = (2x^2 + 7x + 8)e^{2x}$

#### Exercice 5

Soit l'équation différentielle  $(E) : x(x+1)y' - y + 1 = 0$ .

1. Quelles sont les solutions de  $(E)$  sur  $] -\infty, -1[$  ?

On remarquera que  $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)}$

2. Même question sur  $] -1, 0[$ , puis sur  $] 0, +\infty[$  ?
3. (hors programme) Peut-on raccorder les solutions en 0 ? en -1 ?
4. (hors programme)  $(E)$  admet-elle une solution sur  $\mathbb{R}$  ?

#### Exercice 6

Résoudre les équations (ou problèmes de Cauchy) suivant(e)s :

$$\left. \begin{array}{l} 1. \begin{cases} y' - 5y = 0 \\ y(8) = 3 \end{cases} \\ 2. xy' + y = 1 \text{ pour } x \in \mathbb{R}_+^* \end{array} \right| \begin{array}{l} 3. y' + 6y = e^{6x} \\ 4. y' + jy = e^x \text{ avec } j = e^{\frac{2i\pi}{3}} \end{array}$$

#### Exercice 7

**Raccorder les solutions (Difficile et hors programme)**

Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle  $\sqrt{|x|}y' - y = x$ . On utilisera l'égalité  $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \epsilon(u)$  où la fonction  $\epsilon$  vérifie  $\lim_{u \rightarrow 0} \epsilon(u) = 0$ .

## Equations différentielles linéaires d'ordre 2

### Exercice 8

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1.  $y'' + 4y = \sin^2 x$  (à valeurs dans  $\mathbb{R}$ ).
2.  $y'' + y' + y = e^t$  (solutions à valeurs dans  $\mathbb{C}$ , puis dans  $\mathbb{R}$ ).

### Exercice 9

Intégrer en cherchant les solutions à valeurs dans  $\mathbb{R}$

- $y'' + 4y' + 3y = xe^{-3x} + x^3e^{-x}$
- $y'' + y' - 2y = \cos(2x)$

### Exercice 10

Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

$$1. \begin{cases} y'' + y' - 2y = \sin(2x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} y'' + 4y' + 3y = (x^2 + 1)e^x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

## D'autres équations différentielles

### Exercice 11

#### Changement de fonction inconnue

Soit  $(E_1) : (1 + e^x)y'' + 2e^xy' + (2e^x + 1)y = xe^x$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

1. Posons  $z = (1 + e^x)y$ . Montrer que  $y$  est solution de  $(E_1)$  si et seulement si  $z$  est solution de  $(E_2)$  avec  $(E_2) : z'' + z = xe^x$ .
2. Résoudre  $(E_2)$ .
3. En déduire les solutions de  $(E_1)$ .

### Exercice 12

#### Changement de variable

Soit  $(E_1) : x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$ .

1. Posons  $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto y(e^t)$ . Montrer que si  $y$  est solution de  $(E_1)$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ , alors  $z$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  puis calculer  $z'$  et  $z''$ .
2. Montrer que  $y$  solution de  $(E_1)$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  implique que  $z$  est solution de  $(E_2) : z'' - 4z' + 4z = 0$ .
3. Résoudre  $(E_2)$ .
4. Montrer que  $y$  solution de  $(E_1)$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  implique qu'il existe des réels  $a$  et  $b$  tels que  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, y(x) = ax^2 + bx^2 \ln(x)$ .
5. En déduire les solutions de  $(E_1)$ .

### Exercice 13

#### Système différentiel

Soit  $\omega \in \mathbb{R}$ , on considère le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique dirigé suivant l'axe  $(Oz)$ . Son mouvement est régi par le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'' &= \omega y' \\ y'' &= -\omega x' \\ z'' &= 0 \end{cases}$$

En posant  $u = x' + iy'$ , résoudre le système différentiel.

### 3.6 Exercices Complémentaires

#### Exercice 1

Justifier l'existence des intégrales suivantes puis les calculer.

$$G = \int_{-1}^1 (t+1)(t+2)^2 dt \quad H = \int_0^1 (2x-1) \exp(x^2 - x + 1) dx \quad I = \int_1^4 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

#### Exercice 2

##### Intégration par parties

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une ou de plusieurs intégrations par parties :

$$M = \int_0^1 \ln(1+x) \left( \frac{1}{2} + x \right) dx$$

$$N = \int_1^2 \frac{\ln(x)}{x^2} dx$$

#### Exercice 3

##### Changement de variable

Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable indiqué :

$$R = \int_0^3 \frac{x}{1 + \sqrt{x+1}} dx \quad (t = \sqrt{x+1})$$

$$S = \int_0^1 \frac{(t^2 + \sqrt{t^2 + 1})^2}{\sqrt{t^2 + 1}} t dt \quad (u = \sqrt{t^2 + 1})$$

#### Exercice 4

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$1. (x+1)y' = y+1.$$

$$2. x y'(x) = n y(x) \text{ où } n \in \mathbb{Z} \text{ est fixé.}$$

$$3. x^3 y'(x) = 2y(x).$$

$$4. x^2 y' + y = 0.$$

$$5. 2x(x+1)y' + (x-1)y = 0 \text{ (solutions sur } ]0; +\infty[ \text{ et sur } ]-1; 0[, \text{ puis sur } ]-\infty; -1[), \text{ on pourra utiliser que}$$

$$\frac{x-1}{2x(x+1)} = \frac{a}{2x} + \frac{b}{x+1}.$$

$$6. |x|y' + (x-1)y = x^2.$$

#### Exercice 5

Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

$$1. \begin{cases} y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} + xe^{3x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} y'' + 2y' + 5y = 8e^x + 17 \cos(2x) \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 11 \end{cases}$$